В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Вимірювання многокутників

8 КЛАС

Базовий курс для загальноосвітніх навчальних закладів

**Підручник для учнів,
які прагнуть знати більше,
та вчителів, які хочуть вчити краще**

За редакцією проф. В.І. Михайловського

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

ББК 22.1я72
74.262.21
Т53

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш

кандидат фізико-математичних наук,
доцент Тернопільського національного педагогічного університету ім. Володимира Гнатюка
В.Р. Кравчук

Тадеєв В.О.

Т53 Геометрія. Вимірювання многокутників: Базовий курс. Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів / За ред. В.І. Михайловського. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. — 288 с.

ISBN 978-966-10-0268-4

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням історичного, світоглядного та методологічного характеру.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0268-4

Розділ I Чотирикутники

§1 Довільні чотирикутники

1.1. Означення чотирикутника та його елементів. Опуклі й неопуклі чотирикутники

Трикутник є однією з основних геометричних фігур у тому розумінні, що дослідження інших фігур відбувається на основі властивостей трикутника. Зокрема, на основі властивостей трикутника вивчають чотирикутники. У практичному ж відношенні чотирикутні форми навіть більш важливі, ніж трикутні. Зокрема, земельні ділянки, з вимірювання яких починалася геометрія, найчастіше мають чотирикутні форми.

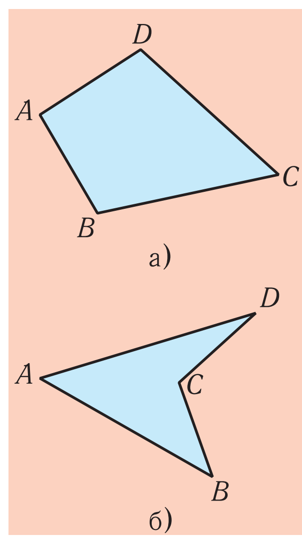

Рис. 1.1

Чотирикутником називається плоска фігура, яка визначається чотирма точками, наприклад, A, B, C, D, — *вершинами* чотирикутника — та обмежується чотирма відрізками AB, BC, CD і DA, які послідовно з'єднують ці точки, — *сторонами* чотирикутника (рис. 1.1, а, б). При цьому жодні дві зі сторін AB, BC, CD, DA не повинні перетинатися у своїх внутрішніх точках. Останню вимогу, наприклад, не задовольняє фігура, зображена на рис. 1.2. У ній відрізки AB і CD перетинаються у внутрішній точці. Тому така фігура не є чотирикутником.

Позначення чотирикутників утворюється з позначень їхніх вершин, записаних підряд. Наприклад, на рис. 1.1

зображено два чотирикутники $ABCD$. Ті ж само чотирикутники можна позначити й так: $BCDA$, $CDAB$, $DCBA$ тощо. Проте позначення $ACBD$ — неправильне.

Важливою характеристикою чотирикутника є його периметр. *Периметром* чотирикутника (від грецьких слів «пері» — навколо і «метрео» — вимірюю) називається сума довжин усіх його сторін.

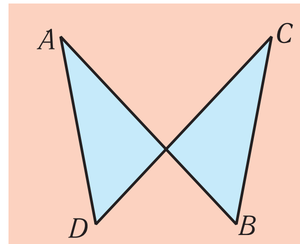

Рис. 1.2

Вершини чотирикутника, які є кінцями однієї сторони, називаються *сусідніми* вершинами. Несусідні вершини називаються *протилежними*. Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, називаються *суміжними*, а ті, що не мають спільної вершини — *протилежними*. У чотирикутнику — дві пари протилежних сторін. Наприклад, у чотирикутниках $ABCD$, зображених на рис. 1.3, а, б, сусідніми є вершини A і B, B і C, C і D, D і A, а протилежними — вершини A і C та B і D. Суміжними є сторони AB і BC, BC і CD, CD і DA, DA і AB, а протилежними — сторони AB і CD та AD і BC.

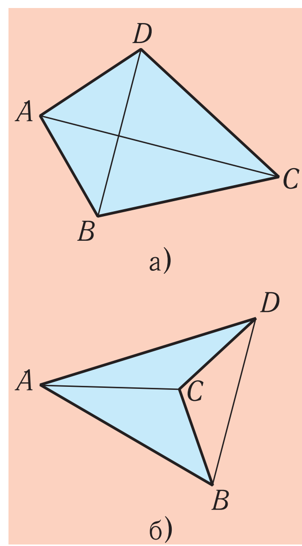

Рис. 1.3

Відрізки, які з'єднують протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями* (від грецьких слів «діа» — через і «гоніо» — кут). Чотирикутник має дві діагоналі. Наприклад, діагоналями обох чотирикутників $ABCD$, зображених на рис. 1.3, є відрізки AC і BD.

Якщо обидві діагоналі належать чотирикутнику, то такий чотирикутник називається *опуклим*. В противному разі — *неопуклим*. На рис. 1.3, а зображено опуклий чотирикутник $ABCD$, а на рис. 1.3, б — неопуклий.

Чотирикутник можна утворити за допомогою двох трикутників, які мають по одній рівній стороні (рис. 1.4, а). Для цього трикутники потрібно прикласти один до одного так, щоб сумістилися рівні сторони. Якщо при цьому трикутники розмістяться по різні боки від спільної сторони (рис. 1.4, б), то іншими їхніми сторонами визначиться опуклий чотирикутник,

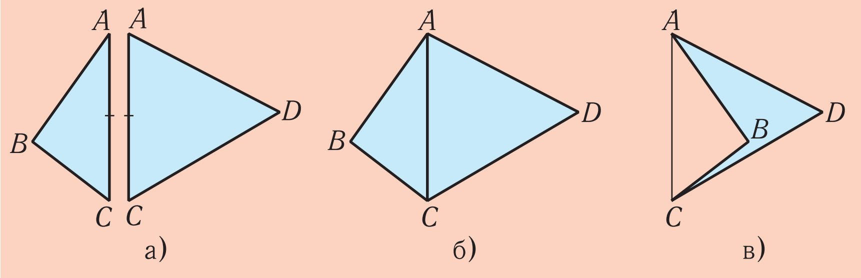

Рис. 1.4

а якщо з одного боку — то неопуклий (рис. 1.4, в). Щоправда, неопуклий чотирикутник може і не визначитися, — якщо не суміщені сторони трикутників перетнуться (рис. 1.5).

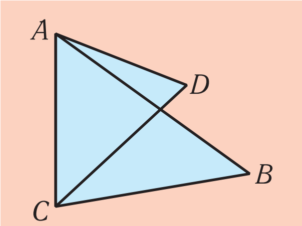

Рис. 1.5

Згодом доведемо, що одна з діагоналей неопуклого чотирикутника завжди лежить всередині цієї фігури, а інша — ззовні. Тому зрозуміло, що вони не перетинаються. Натомість діагоналі опуклого чотирикутника завжди перетинаються.

Теорема
(про діагоналі опуклого чотирикутника).

Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються.

Доведення. Нехай маємо опуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 1.6). Розглянемо його діагональ BD. Оскільки даний чотирикутник опуклий, то BD належить йому. Тому цьому чотирикутнику належать обидва трикутники ABD та CBD. Ці трикутники лежать по різні боки від прямої AD, інакше дана пряма не розбивала б чотирикутник $ABCD$. Отже, одна частина діагоналі AC (яка теж належить чотирикутнику), що виходить з A, належить одному з вказаних трикутників, а інша, що виходить з B, — іншому. Тому існує й така точка O, яка належить спільній межі BD цих трикутників. Отже, точка O є перетином діагоналей AC і BD. Теорему доведено.

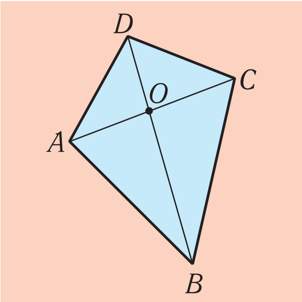

Рис. 1.6

1.2. «Нежорсткість» чотирикутника

Уявімо собі чотирикутник $ABCD$ у вигляді фізичної моделі, що складається з чотирьох планок, скріплених одна з одною у вершинах за допомогою шарнірів (тобто так, що вони можуть повертатися одна відносно одної) (рис. 1.7). Діагоналі AC у цій моделі немає, вона проведена умовно. Існує цілий проміжок значень для відрізка AC, при яких за даних значень $AB = a$ та $BC = b$ існуватиме трикутник ABC. Це проміжок $(0; a + b)$. Так само існує цілий проміжок значень $(0; c + d)$ для відрізка AC, при яких існуватиме трикутник ACD. Нехай f — менше зі значень $a + b$ та $c + d$. Тоді для будь-якого зі значень довжини відрізка AC з проміжку $(0; f)$ одночасно існуватимуть обидва трикутники ABC і ACD. А це свідчитиме, що існує нескінченно багато чотирикутників $ABCD$ із заданими довжинами сторін. З фізичної точки зору це означає *нежорсткість* шарнірного чотирикутника $ABCD$, тобто можливість різних його трансформацій без зміни довжин сторін (рис. 1.8).

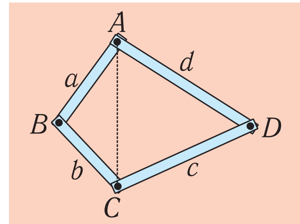

Рис. 1.7

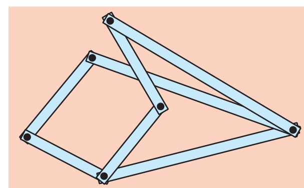

Рис. 1.8

Цей факт широко використовується у техніці для створення шарнірних механізмів. Далі у нашому підручнику буде розглянуто декілька прикладів таких механізмів.

Нагадаємо, що, на відміну від чотирикутника, трикутник є жорсткою фігурою, оскільки повністю визначається своїми сторонами: два трикутники з відповідно рівними сторонами рівні між собою.

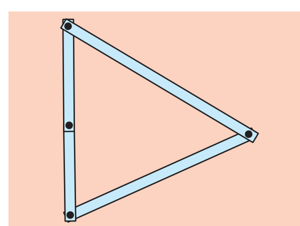

Рис. 1.9

Серед усіх можливих трансформацій шарнірного чотирикутника будуть і такі, у яких сусідні сторони розмістяться на одній прямій, а кут між ними, отже, буде розгорнутим (рис. 1.9). Чотирикутник у цих випадках вироджується у трикутник. Але оскільки такі трикутні форми є проміжними між опуклими й неопуклими чотирикутниками, то їх теж варто вважати чотирикутниками.

Одна з діагоналей «виродженого» чотирикутника складається із двох його суміжних сторін. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$ з розгорнутим кутом B (рис. 1.10) діагональ AC складається зі сторін AB і BC. Проте, хоч і в такий спосіб, а все ж ця діагональ належить чотирикутнику. А оскільки й інша діагональ BD теж йому належить, то такий чотирикутник є опуклим.

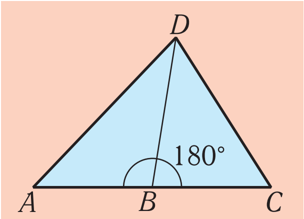

Рис. 1.10

Задача.
Довести, що будь-яка сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін.

Розв'язання. Доведемо, що в довільному чотирикутнику $ABCD$ (байдуже, опуклому чи неопуклому) сторона AB, наприклад, менша від суми сторін BC, CD та AD (рис. 1.11). Для цього проведемо діагональ AC. Одержимо трикутники ABC та ADC. За нерівністю трикутника, з першого з них:

$$AB < BC + AC.$$

А з другого —

$$AC < CD + AD.$$

Підставляючи у першу з цих нерівностей замість AC більше за нього значення $CD + AD$ (як свідчить друга нерівність), ми тільки підсилимо першу нерівність:

$$AB < BC + CD + AD.$$

Твердження задачі доведено.

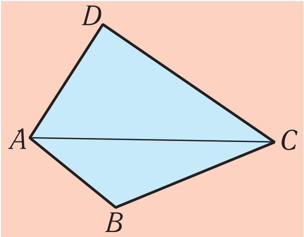

Рис. 1.11

1.3. Кути чотирикутника

Опуклість чи неопуклість чотирикутника можна визначити за величиною його кутів. На відміну від трикутника, означення внутрішнього кута чотирикутника потребує уточнення самого поняття кута. Досі кутом називалася фігура, утворена двома променями (сторонами) зі спільним початком. Кутом називалася також частина площини, обмежена його сторонами (рис. 1.12). При цьому вважалося, що сторонами

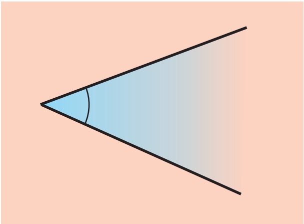
Рис. 1.12

кута обмежується лише одна (менша) частина площини, а мірою цього плоского кута вважалася величина, що не перевищує 180°. Для вивчення трикутників такого поняття кута було достатньо, оскільки жоден із кутів цієї фігури не може бути більшим за 180°. У чотирикутнику ж можуть бути й кути, які більші за 180°. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$, зображеному на рис. 1.13, таким є кут D. Це й вимагає уточнення поняття кута.

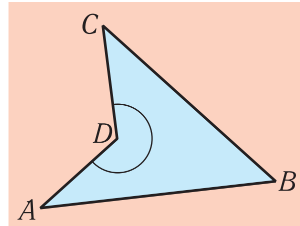

Рис. 1.13

Тому надалі фігуру, яка складається із двох променів зі спільним початком, називатимемо *лінійним* кутом і братимемо до уваги кожну з обох частин площини, на які її розбиває лінійний кут (рис. 1.14). Ці частини називаються *плоскими* кутами, визначеними даним лінійним кутом. Один із плоских кутів, визначених нерозгорнутим лінійним кутом, має ту властивість, що йому належать усі відрізки з кінцями на сторонах даного лінійного кута. Його називають *опуклим* плоским кутом. Іншому плоскому куту згадані відрізки не належать. Його називають *неопуклим*, або *увігнутим* плоским кутом.

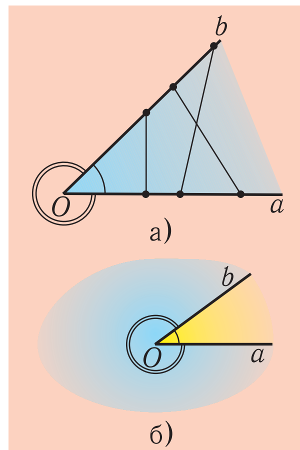

Рис. 1.14

На рис. 1.14, а) затушовано опуклий плоский кут, а на рис. 1.14, б) — неопуклий плоский кут, визначений лінійним кутом з вершиною O та сторонами a і b.

Розгорнутий лінійний кут (рис. 1.15) розбиває площину на два рівних плоских *розгорнутих* кути. Обидва вони вважаються опуклими.

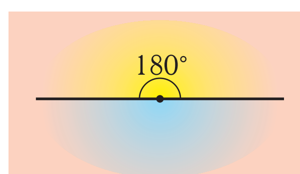

Рис. 1.15

Вершина і сторони лінійного кута називаються, відповідно, *вершиною* і *сторонами* кожного з обох визначених ним плоских кутів.

Мірою опуклого плоского кута вважається градусна міра φ відповідного йому лінійного кута. Отже, ця міра більша від 0° і не перевищує 180°. Мірою неопуклого плоского кута вважається величина $360° - \varphi$. Отже, ця міра не менша від 180° і не більша за 360°. Якщо лінійний кут розгорнутий, то обидва визначених ним плоских кути дорівнюють по 180°.

Як і для трикутника, при кожній вершині чотирикутника розглядають плоский кут, який визначений його сторонами і містить даний чотирикутник. Цей кут називається *кутом чотирикутника* при даній вершині (інколи для визначеності кажуть — *внутрішнім кутом* чотирикутника при цій вершині).

Для прикладу, на рис. 1.16, а, б) дужками відзначені опуклий та неопуклий плоскі кути чотирикутників $ABCD$ при вершині B. Розгорнутий кут B «виродженого» чотирикутника $ABCD$, зображеного на рис. 1.10, теж є опуклим.

Кути чотирикутника, вершини яких є протилежними, називаються *протилежними*, а кути, які мають спільну сторону чотирикутника — *прилеглими* до цієї сторони.

У чотирикутниках $ABCD$, що на рис. 1.16, а, б), протилежними є кути A і C та B і D, а прилеглими до сторони AB — кути DAB та CBA.

Якщо чотирикутник $ABCD$ опуклий, то відповідно до означення, йому належить кожна його діагональ. Якщо ж, наприклад, діагональ AC належить чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.17, а), то вона належить і кожному із його плоских кутів ABC та ADC, сторони яких «стягує». А це означає, що обидва ці кути опуклі. Те ж саме стосується й іншої діагоналі BD та іншої пари кутів BAD та BCD, сторони яких вона «стягує» (рис. 1.17, б). Виходить, таким чином, що усі кути опуклого чотирикутника є опуклими, тобто величина кожного з них не перевищує 180°.

Навпаки, якщо усі кути чотирикутника не перевищують 180°, то кожна діагональ належить тій парі протилежних кутів, сторони яких вона «стягує», а тому належить і самому чотирикутнику. Отже, цей чотирикутник є опуклим.

Таким чином, замість прийнятого у п. 1.1 означення опуклого чотирикутника як чотирикутника, який

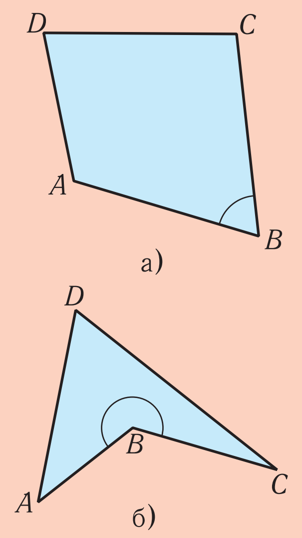

Рис. 1.16

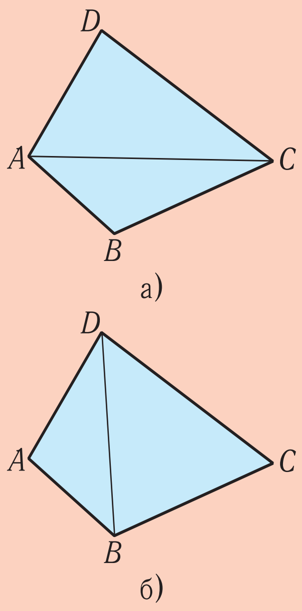

Рис. 1.17

містить обидві свої діагоналі, можна прийняти інше означення, а саме: *чотирикутник називається опуклим, якщо кожен із його кутів не перевищує 180°*. Обидва ці означення *рівносильні* (кажуть ще *еквівалентні*), тобто, якщо чотирикутник є опуклим відповідно до першого означення, то він є опуклим і відповідно до другого, та навпаки.

Звідси, як логічний наслідок випливає, що чотирикутник неопуклий тоді і тільки тоді, коли він має *неопуклий* (*увігнутий*) кут, тобто кут, який перевищує 180°.

1.4. Сума кутів чотирикутника

Теорема
(про суму кутів чотирикутника).

Сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360°.

Доведення. Нехай маємо чотирикутник $ABCD$, опуклий чи неопуклий. Проведемо діагональ AC (рис. 1.18). Якщо вона належить чотирикутнику (рис. 1.18, а, б), то нею даний чотирикутник розіб'ється на два трикутники, сума кутів яких дорівнюватиме сумі кутів даного чотирикутника. А оскільки сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°, то звідси випливатиме, що сума кутів даного чотирикутника дорівнює $2 \cdot 180°$, тобто 360°.

Якщо ж діагональ AC лежатиме ззовні чотирикутника $ABCD$ (рис. 18, в), то невідома сума x його кутів дорівнюватиме сумі кутів трикутника ADC (тобто 180°), до якої потрібно додати кут β чотирикутника і відняти кути α і γ трикутника ABC:

$$x = 180° + \beta - \alpha - \gamma.$$

Але сума кутів трикутника ABC теж дорівнює 180°, а його кут ABC дорівнює $360° - \beta$:

$$\alpha + \gamma + 360° - \beta = 180°.$$

Звідси $\beta - \alpha - \gamma = 180°$, а тому $x = 180° + 180° = 360°$.

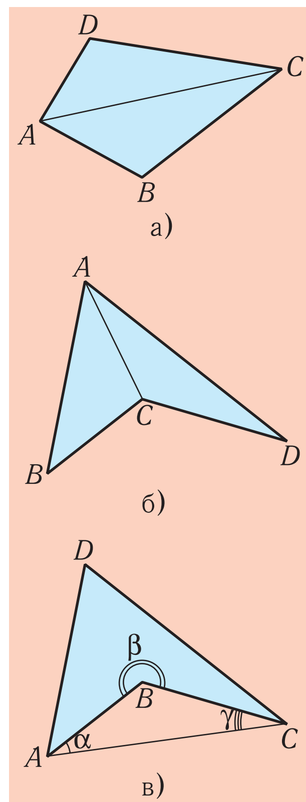

Рис. 1.18