

Задачі посібника поділено на 11 тем, які охоплюють навчальний матеріал з математики для 6 класу. Відразу зазначимо, що ці задачі не лише для учнів 6 класу — чимала їхня частка аналогічна до тих завдань, які пропонують на математичних олімпіадах чи конкурсах для учнів 7–9 класів.

Кожна тема посібника містить задачі 1–15, які стосуються матеріалу теми, а також нестандартні задачі 16–20, загальні підходи й алгоритми розв’язування яких у шкільному курсі математики не розглядають. Розв’язування задач, які стосуються матеріалу теми, також вимагають нестандартних міркувань, тому до багатьох із них подано розширені вказівки.

Пошук способу розв’язування нестандартних задач потребує кмітливості та винахідливості. Це й обумовлює здебільшого складність таких задач. У посібнику розглянуто деякі типи нестандартних задач, які доволі часто пропонують на математичних конкурсах, турнірах, олімпіадах. Це зокрема задачі на принцип Діріхле, принцип інваріанта, принцип крайнього, задачі на виграшні стратегії, на розфарбування тощо. Серед різноманіття нестандартних задач указані задачі об’єднує те, що основою їхніх розв’язань є переважно не знання певних теорем чи формул, а лише цілеспрямовані міркування.

У кожній темі посібника описано методи, які можна використати при розв’язуванні задач 16–20 та наведено приклади розв’язань. При цьому увага акцентується не на самому розв’язанні, а на тому, як до нього можна прийти. Кінець розв’язання кожної задачі позначено значком (■).

У посібнику наведено приклади завдань шкільних і районних олімпіад з математики для 6 класу.

Шановні учні та учениці! Захоплення математикою часто починається з роздумів над цікавою, але складною математичною задачею.

Поділ математичних задач на прості та складні є доволі умовним. Мабуть, кожний з вас натрапляв на задачі, в яких і зміст зрозумілий, і розв'язання не вимагає особливих знань, але вони виявляються складними, бо не відомо, як їх розв'язувати.

Даний посібник може допомогти вам опановувати основні методи розв'язування нестандартних задач, а це розвиває кмітливість та креативність, навчає творчо міркувати, формує нестандартність мислення та дій. Це особливо важливо для майбутнього, коли доведеться самим приймати нестандартні рішення у навчальних чи життєвих ситуаціях.

Ідея розв'язування задачі, яка спочатку здається несподіваною, може бути використана при розв'язуванні інших задач. Поступово ця ідея, яка ґрунтується на нібито штучних міркуваннях, починає сприйматися як звичний метод.

Із самого початку важливо зрозуміти: навчитися швидко й без зусиль розв'язувати нестандартні задачі неможливо. Цей посібник для клопіткої, але цікавої роботи.

Шановні вчителі та вчительки! Матеріали посібника розраховані на те, щоб допомогти вам у проведенні занять математичних гуртків. Крім того, цей посібник дає додатковий матеріал, який дозволяє, не відходячи далеко від програми, зробити уроки жвавішими та цікавішими.

Сподіваємося, що даний посібник стане в нагоді як для першого знайомства з нестандартними задачами, так і для підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах і конкурсах.

Розв'яжуйте задачі із задоволенням!

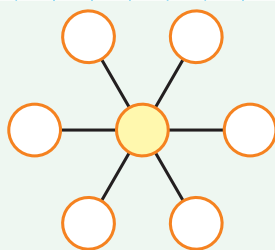
Бажаємо успіхів!

Тема 1

Дільники і кратні натурального числа. Ознаки подільності

1

Усі дільники числа 64 Ольга має розподілити по кружечках, зображених на рисунку, так, щоб добутки трьох чисел у кружечках, які лежать на одній прямій, були рівні. Яке число Ольга має записати в жовтий кружечок?



2

До числа 25 праворуч і ліворуч Андрій приписав по одній цифрі й одержав чотирицифрове число, кратне 45. Яке число одержав Андрій?

3

На дошці записали десятицифрове число, використавши кожен цифру лише один раз. Чи ділиться це число на 9?

4

Олексій має картки, зображені на рисунку. Скільки різних трицифрових чисел, які діляться на 9, він може скласти з цих карток?



5

Вікторія має записати замість зірочок такі цифри, щоб число $2*7*5*$ ділилося на 90. Скільки щонайбільше різних чисел вона може записати?

6

Сергій і Тарас записали 50 перших натуральних чисел, до того ж Сергій записував лише парні числа, а Тарас — непарні. Що більше: сума всіх цифр, які записав Сергій, чи сума всіх цифр, які записав Тарас, і на скільки більше?

7

Змій Горинич має більше ніж 5 голів, але менше ніж 15. Кожна його голова знає одну й ту саму кількість слів, а різні голови не знають одного й того ж слова. Загалом Змій знає 135 слів. Скільки щонайменше голів треба задіяти Змію Гориничу, щоб сказати 80 різних слів?

8

Дарина живе в багатоповерховому будинку. Проаналізувавши код вхідних дверей свого під'їзду, вона зауважила, що це найбільше чотирицифрове число, яке ділиться на 9 і на 5, але не ділиться на 2. Який код вхідних дверей під'їзду, в якому живе Дарина?

9

Юрій обчислив добуток десяти перших натуральних чисел і записав результат, закривши три останні цифри: 3 628 ■■■. Не виконуючи множення, знайдіть цифри, які закрив Юрій.

10

Натуральне число n при діленні на 3, на 6 і на 9 дає остачі, сума яких дорівнює 15. Доведіть, що число $n + 1$ ділиться на 18.

11

У багатоцифровому числі Олександр переставив деякі цифри й одержав число, яке втричі менше від початкового. Доведіть, що початкове число ділиться на 9.

12

Наталя й Оксана розв'язали задачі, пов'язані з рядом натуральних чисел від 1 до 1000 включно: Наталя знайшла кількість чисел цього ряду, які діляться на 7, але не діляться на 8, а Оксана — кількість чисел, які діляться на 8, але не діляться на 7. У котрої дівчини знайдена кількість є більшою і на скільки більшою?

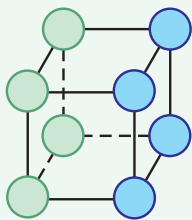
13

В оранжереї підготували для покупців певну кількість троянд. Якщо з них складати букети по 3 троянди у кожному або по 5 троянд, то залишатиметься одна троянда. Яку найменшу кількість троянд потрібно ще додати, щоб, використавши всі троянди, можна було скласти букети як по 3 троянди, так і по 5 троянд у кожному?



14

Чи можна всі дільники числа 30 записати по одному в кружечки, зображені на рисунку, так, щоб сума чисел у зелених кружечках дорівнювала сумі чисел у синіх кружечках?



15

Олег пронумерував 15 карток числами 1, 2, ..., 15, перетасував картки, розклав чистим боком догори і знову пронумерував числами 1, 2, ..., 15. Потім для кожної картки він додав числа, які на ній написані, і перемножив 15 одержаних сум. Доведіть, що знайдений Олегом добуток є парним числом.

Додаткові задачі

16

Чи існують натуральні числа x та y , для яких виконується рівність

$$xy(x + 5y) = 81?$$

17

Чи можна в записі

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$$

записати замість зірочок знаки «+» або «-» так, щоб значення одержаного числового виразу дорівнювало 50?

18

На чарівній яблуні ростуть 57 яблук. З неї дозволяють зривати 3, 7 або 10 яблук. Замість них на яблуні відразу виростають відповідно 7, 11 або 6 нових яблук. Чи можна з яблуні зірвати всі яблука?

19

На чотирьох відділеннях полиці стоять книжки, як показано на рисунку. Чи можна ці книжки розподілити по відділеннях так, щоб кількості книжок на сусідніх відділеннях відрізнялися на 1?



20

Наталя записала число у двійковій системі числення:

$$100\ 101\ 011\ 110\ 000\ 100\ 110.$$

Чи може вона в цьому числі позбутися цифри 0, замінюючи записані підряд цифри 01 на 10, 10 — на 01, 11 — на 00 і 00 — на 11?

Методи та ідеї для розв'язування задач 16–20

Парність

Розглянемо приклад.

Приклад 1 Знайдіть усі натуральні числа x та y , для яких виконується рівність

$$x(x + 1) + 4y = 2025.$$

Розв'язання. Одне із двох послідовних натуральних чисел x та $x + 1$ є парним. Тому добуток $x(x + 1)$ — парне число. У такому випадку число $x(x + 1) + 4y$ також є парним і не може дорівнювати непарному числу 2025. Отже, натуральних чисел, для яких виконувалася б дана рівність, не існує.

Відповідь. Таких чисел не існує. ■

Ключовою ідеєю розв'язання прикладу є те, що ми звернули увагу на *парність* обох частин рівності. Розглянемо ще приклади задач, які пов'язані з величинами, що зберігають свою парність.

Приклад 2 На диво-дереві ростуть 45 яблук і 30 груш. Кожного дня з нього одночасно зривають два плоди. Якщо зірвати два яблука або дві груші, то відразу виростає одна груша, а якщо зірвати одне яблуко та одну грушу, то виростає одне яблуко. Через певний час на диво-дереві залишиться один плід. Що це за плід: яблуко чи груша?

Розв'язання. Зауважимо, що спочатку маємо непарну кількість яблук — 45. За один день кількість яблук або зменшується на 2, або не змінюється:



Отже, у будь-який день кількість яблук на диво-дереві має бути непарною.

Це стосується і того дня, коли на дереві залишиться один плід. Отже, цей плід — яблуко.

Відповідь. Яблуко. ■

Приклад 3 На столі стоять 6 чашок, як показано на рисунку. За один хід дозволяється перевернути будь-які 2 чашки. Чи можливо за кілька таких ходів поставити всі чашки дном донизу?



Розв'язання. Якщо перевернути дві чашки, то можливі такі варіанти:

Було догори дном	Стане догори дном
2	0
1	1
0	2

Кількість чашок, які стоять догори дном, або не змінюється, або збільшується чи зменшується на 2. Спочатку таких чашок маємо 5 — непарну кількість, тому *після кожного ходу кількість чашок, які стоять догори дном, буде непарною*. Отже, після ходів на столі завжди буде принаймні одна чашка догори дном, а це означає, що поставити всі чашки дном донизу неможливо.

Відповідь. Неможливо. ■

Приклад 4 Кенгуру стрибає вздовж прямої. Довжина кожного стрибка дорівнює 1 м. Чи може кенгуру, перебуваючи в деякій точці прямої, за 101 стрибок знову повернутися в ту саму точку?

Розв'язання. Якби кенгуру повернувся в початкову точку, то кількість стрибків в один бік дорівнювала б кількості стрибків у протилежний бік і загальна кількість стрибків була б парною. Число 101 непарне, тому за 101 стрибок кенгуру в ту саму точку повернутися не може.

Відповідь. Не може. ■

Передмова	3
Тема 1 Дільники і кратні натурального числа. Ознаки подільності	5
Тема 2 Прості та складені числа	11
Тема 3 Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне	17
Тема 4 Звичайні дроби та дії з ними	23
Тема 5 Текстові задачі на звичайні дроби	29
Тема 6 Відношення і пропорції	35
Тема 7 Відсотки	41
Тема 8 Геометричні фігури та величини	47
Тема 9 Цілі та раціональні числа	53
Тема 10 Вирази. Рівняння	59
Тема 11 Текстові задачі	65
Завдання шкільних олімпіад для 6 класу	71
Завдання районних олімпіад для 6 класу	77
Відповіді та вказівки	82
Література	94