ВІД АВТОРА

Ця збірка розв'язків є додатком до посібника «Повний курс підготовки до ЗНО з математики». В ній наведено розв'язки всіх ключових задач та задач підвищеної складності. Вона містить також відповіді до всіх шістнадцяти тематичних тестів, що наведені в основному посібникові, і сімнадцятого випускного тесту.

Насамперед розв'язник є корисним для тих абітурієнтів, які не мають змоги відвідувати підготовчі курси і готуються до зовнішнього незалежного оцінювання з математики самостійно. Збірка розв'язків є корисною і для слухачів, що відвідують заняття в системі довузівської підготовки за посібником «Повний курс підготовки до ЗНО з математики», але пропустили з якоїсь причини заняття. Особливо вона є корисною для слухачів, що вперше зустрічаються з параметром, бо всі задачі, що містять параметр, — розв'язані.

Побудова перерізів многогранників січною площиною і сам принцип побудови теж детально пояснено. Розв'язки стереометричних задач містять вичерпні пояснення, які розбито на логічні кроки, як того вимагає програма.

Крім того, дарую читачеві графічний спосіб розв'язання системи нерівностей за допомогою квадратних дужок. Для такого способу не має значення кількість нерівностей у системі.

Тригонометричні рівняння і, особливо, нерівності в збірці розв'язуються за допомогою тригонометричного кола, а не за допомогою графіків тригонометричних функцій, як це робиться в шкільних підручниках.

Одним словом, збірка розв'язків є корисною і має, на думку автора, багато цікавих моментів, що допоможе абітурієнту належно підготуватись до ЗНО.

Бажаю Вам успіху, шановний читачу, здійснення мрій і прагнень!

Тема 1

ВІДСОТКИ. ЧИСЛОВІ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ

1.59. За схемою Горнера знаходимо коефіцієнти частки від ділення многочлена на многочлен:

3	1	0	–13	17	–15
	1	$1\cdot3+0=$ **3**	$3\cdot3+(-13)=$ **–4**	$-4\cdot3+17=$ **5**	—

1.80. Нехай $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=A$. Піднесемо цю рівність до куба.

$A^3=10+6\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)^2\left(10-6\sqrt{3}\right)}+3\sqrt[3]{\left(10+6\sqrt{3}\right)\left(10-6\sqrt{3}\right)^2}+$ $+10-6\sqrt{3}$; $A^3=20+3\sqrt[3]{(100-108)\left(10+6\sqrt{3}\right)}+3\sqrt[3]{(100-108)\left(10-6\sqrt{3}\right)}=$ $=20+3\sqrt[3]{-8\left(10+6\sqrt{3}\right)}+3\sqrt[3]{-8\left(10-6\sqrt{3}\right)}=20-6\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}-$ $-6\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=20-6\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}\right)$; отже $A^3=20-6A$, звідки $A^3+6A-20=0$; $A=2$ — очевидний корінь; $A^3+6A-20=$ $=\left(A-2\right)\left(A^2+2A+10\right)=0$. $A=2$ — єдиний корінь цього рівняння. Отже, $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=2$.

Відповіді до тесту №1

Варіант 1			
№	**Відповідь**		**Бали**
1	13	**Б**	1
2	$-x^2$	**Д**	1

3	$\dfrac{x+5}{x-2}$	**Г**	1
4	$8-\left(x-2\right)^2$	**Г**	1
5	$(2x-3)(x+5)$	**А**	1
6	$-\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$	**Б**	1
7	3	**3**	2
8	–0,25	**–0,25**	2
9	$a=-9,\ b=15$	$a+b=$ **6**	2
Загальна кількість балів			12

Варіант 2			
№	**Відповідь**		**Бали**
1	72	**Г**	1
2	$-x^3$	**Д**	1
3	$\dfrac{x-4}{x+3}$	**В**	1
4	$18-\left(x-3\right)^2$	**А**	1
5	$(3x-1)(x+4)$	**В**	1
6	$4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$	**В**	1
7	3	**3**	2
8	1	**1**	2
9	$a=7,\ b=14$	$a+b=$ **21**	2
Загальна кількість балів			12

Тема 12

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ. ВЕКТОРИ

12.1. 1) Координати середини D сторони BC:

$$x_D = \frac{-5+5}{2} = 0,\ y_D = \frac{-3+1}{2} = -1;\ D(0;-1).$$

2) Довжина медіани AD:

$$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

12.2. $x_C = \dfrac{2+0{,}6\cdot 10}{1+0{,}6} = \dfrac{2+6}{1{,}6} = \dfrac{8}{1{,}6} = 5,\ y_C = \dfrac{3+0{,}6\cdot 11}{1+0{,}6} = \dfrac{9{,}6}{1{,}6} = 6;$ $x_C + y_C = 5 + 6 = 11.$

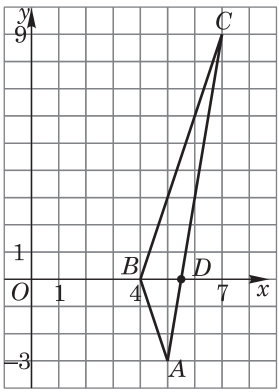

Рис. 12.1

12.4. *І спосіб* (рис. 12.1).

1) Рівняння прямої BC:

$$\frac{x-4}{7-4} = \frac{y-0}{9-0};\ \frac{x-4}{3} = \frac{y}{9};\ 3x - y - 12 = 0.$$

2) Рівняння прямої AB:

$$\frac{x-5}{4-5} = \frac{y+3}{0+3};\ \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{3};\ 3x + y - 12 = 0.$$

3) Точка бісектриси кута B рівновіддалена від прямих AB і BC. Тому правильною є рівність:

$$\frac{|3x-y-12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|3x+y-12|}{\sqrt{3^2+1^2}};$$

$$\frac{|3x-y-12|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x+y-12|}{\sqrt{10}};$$

$$|3x-y-12| = |3x+y-12|;\ \left[\begin{array}{l} 3x+y-12 = 3x-y-12, \\ 3x+y-12 = -3x+y+12; \end{array}\right. \ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє рівняння $y = 0$.

4) Рівняння прямої AC: $\frac{x-5}{7-5} = \frac{y+3}{9+3}$; $\frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{12}$; $6x - y - 33 = 0$.

5) Координати основи бісектриси, точки D, знайдемо як точку перетину прямих AC та $y = 0$. $\begin{cases} 6x - y - 33 = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5{,}5, \\ y = 0; \end{cases}$ $D(5{,}5;0)$.

6) Довжину бісектриси BD шукаємо як відстань між точками B і D:

$$BD = \sqrt{(5{,}5-4)^2 - (0-0)^2} = 1{,}5.$$

II спосіб.

1) Довжина сторони AB: $AB = \sqrt{(5-4)^2 - (-3-0)^2} = \sqrt{10}$.

2) Довжина сторони BC: $BC = \sqrt{(7-4)^2 - (9-0)^2} = 3\sqrt{10}$.

3) За властивістю бісектриси трикутника, $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 3$.

Позначимо це відношення через λ. Тоді координати точки D знаходимо за формулою поділу відрізка у заданому співвідношенні.

$$x_D = \frac{7 + 3 \cdot 5}{1+3} = \frac{22}{4} = 5{,}5; \quad y_D = \frac{9 + 3\cdot(-3)}{1+3} = \frac{0}{4} = 0.$$

Отже, $D(5{,}5;0)$.

4) $BD = \sqrt{(5{,}5-4)^2 - (0-0)^2} = 1{,}5$.

12.5. *I спосіб.*

1) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{(5-4;-3-0)} = \overrightarrow{(1;-3)}$; $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(7-4;9-0)} = \overrightarrow{(3;9)}$. З попередньої задачі $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{10}$, а $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 9 = -24$.

Тоді $\cos\angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-24}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10}} = -\frac{24}{30} = -\frac{4}{5}$.

2) Кут ABC — тупий, тому $\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC} = \frac{3}{5}$.

3) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{3}{5} = 9$ (кв. од.).

$\left[\begin{array}{l} a > -3+\sqrt{13}, \\ a < -3-\sqrt{13}. \end{array}\right.$ $-3-\sqrt{13} \approx -6{,}61$; $-3+\sqrt{13} \approx 0{,}61$. Отже,

$$a \in \left(-\infty; -3-\sqrt{13}\right) \cup \left(-3+\sqrt{13}; \infty\right). \qquad (3)$$

2.4) $t_0 = -\dfrac{2(a-2)}{2 \cdot 1} = 2 - a$; $\left[\begin{array}{l} 2-a<1, \\ 2-a>3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<-1; \end{array}\right.$

$$a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty). \qquad (4)$$

2.5) Графічно шукаємо перетин розв’язків (1) – (4) (рис. 17.45).

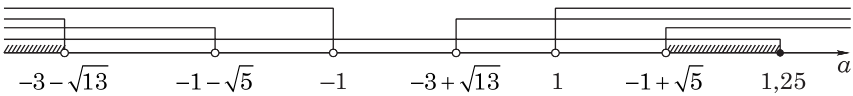

Рис. 17.45

З рисунка бачимо, що

$$a \in \left(-\infty; -3-\sqrt{13}\right) \cup \left(-1+\sqrt{5}; 1{,}25\right]. \qquad (**)$$

3) Об’єднуючи розв’язки (*) та (**), матимемо:

$$a \in \left(-\infty; -3-\sqrt{13}\right) \cup \left(-1+\sqrt{5}; \infty\right).$$

Найбільшим цілим від’ємним значенням a є число –7, а найменшим цілим додатним значенням є число 2. Їхній добуток дорівнює –14.

17.55. $a \in [-2{,}25; 2]$; сума цілих значень дорівнює 0.

17.60. 1) Нехай $x + y = p$, $xy = q$.

2) $x^3 + x^3y^3 + y^3 = 55$; $x^3 + y^3 + (xy)^3 = 55$;

$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + (xy)^3 = 55;$$

$$(x+y)\left(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy\right) + (xy)^3 = 55;$$

$$(x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) + (xy)^3 = 55;$$

$$p\left(p^2 - 3q\right) + q^3 = 55; \; p^3 - 3pq + q^3 = 55.$$

3) $x - xy + y = 1$; $p - q = 1$.

4) $\begin{cases} p^3 - 3pq + q^3 = 55, \\ p - q = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} p = q + 1, \\ (q+1)^3 - 3q(q+1) + q^3 = 55; \end{cases}$

$q^3 + 3q^2 + 3q + 1 - 3q^2 - 3q + q^3 = 55$; $2q^3 = 54$; $q^3 = 27$; $q = 3$.

Тоді $p = 3 + 1 = 4$.

5) Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$

17.61. $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x^2y+xy^2=30; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ xy(x+y)=30. \end{cases}$ Нехай $x+y=p$, $xy=q$; тоді маємо систему: $\begin{cases} p+q=11, \\ pq=30, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} p=5, \\ q=6 \end{cases}$ або $\begin{cases} p=6, \\ q=5. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=5 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=5, \\ y=1. \end{cases}$

17.62. 1) Права частина рівняння — квадратний тричлен, в якому, виділивши повний квадрат, можна помітити, що його найменше значення дорівнює 1.

Дійсно, $y^2+8y+17=y^2+8y+16+1=(y+4)^2+1$.

2) Ліва частина рівняння $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x+\sin^2x}=\cos 2x$. При всіх дійсних значеннях x вона знаходиться у межах $-1\le \cos 2x\le 1$. Отже, рівність можлива лише у випадку, коли і ліва частина рівняння, і права дорівнюють 1.

Тому $\cos 2x=1$, $2x=2\pi n$, $n\in Z$, $x=\pi n$, $n\in Z$; $(y+4)^2+1=1$, $(y+4)^2=0$, $y+4=0$, $y=-4$.

Розв'язком рівняння є всі пари чисел виду $(\pi n;-4)$, $n\in Z$.

17.63. 1) $5\sin x+12\cos x=13\left(\dfrac{5}{13}\sin x+\dfrac{12}{13}\cos x\right)=13(\cos x\cos\varphi+$ $+\sin x\sin\varphi)=13\cos(x-\varphi)$, де $\varphi=\mathrm{arctg}\,\dfrac{12}{5}$; $-1\le\cos(x-\varphi)\le 1$, при $\forall x,\varphi\in R$, а $13\cos(x-\varphi)=5\sin x+12\cos x\in[-13;13]$.

2) $3y^2-18y+40=3\left(y^2-6y+9\right)+13=3(y-3)^2+13$;

$3y^2-18y+40\ge 13$, при $\forall y\in R$.

3) $\begin{cases} 13\cos(x-\varphi)=13, \\ 3(y-3)^2+13=13; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(x-\varphi)=1, \\ 3(y-3)^2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x-\varphi=2\pi n,\ n\in Z, \\ y=3; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\dfrac{12}{5}+2\pi n,\ n\in Z, \\ y=3. \end{cases}$

17.64. $4\sin^4 2x + 4\cos^4 2x = 4\cos^2 4x + 1$; $\left(2\sin^2 2x\right)^2 + \left(2\cos^2 2x\right)^2 =$ $= 4\cos^2 4x + 1$; $\left(1-\cos 4x\right)^2 + \left(1+\cos 4x\right)^2 = 4\cos^2 4x + 1$;
$1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x + 1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x = 4\cos^2 4x + 1$;
$2 + 2\cos^2 4x = 4\cos^2 4x + 1$; $2\cos^2 4x = 1$; $1 + \cos 8x = 1$; $\cos 8x = 0$;
$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, n \in Z$.

17.65. $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$; $\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{4}{5\sqrt{5}}$.

Нехай $\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\varphi$, $\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin\varphi$, де $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Тоді маємо рівняння: $\sin x \cos\varphi - \cos x \sin\varphi = \frac{4}{5\sqrt{5}}$; $\sin(x - \varphi) = \frac{4\sqrt{5}}{25}$; $x - \varphi =$ $= \left(-1\right)^n \arcsin\frac{4\sqrt{5}}{25} + \pi n, n \in Z$; $x = \varphi + \left(-1\right)^n \arcsin\frac{4\sqrt{5}}{25} + \pi n, n \in Z$;
$x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \left(-1\right)^n \arcsin\frac{4\sqrt{5}}{25} + \pi n, n \in Z$.

17.66. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(15\pi + 6x)$;
$2\cos\frac{7x+5x}{2}\cos\frac{7x-5x}{2} = \cos\left(\pi + 6x\right)$; $2\cos 6x \cos x = -\cos 6x$;
$2\cos 6x\cos x + \cos 6x = 0$; $\cos 6x\left(2\cos x + 1\right) = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0,\\ \cos x = -\frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z,\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in Z,\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.\end{array}\right.$$

17.67. $\cos 3x = \sin x$; $\cos 3x - \sin x = 0$; $\cos 3x - \left(\cos\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$;

$$-2\sin\frac{3x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\sin\frac{3x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0;\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,\\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z,\\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in Z;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.\end{array}\right.$$

Відповіді до тесту №17

Зошит 1

1. В. **2.** В. **3.** Д. **4.** А. **5.** Б. **6.** В. **7.** Б. **8.** В. **9.** Б. **10.** В. **11.** А. **12.** Б. **13.** А. **14.** Г. **15.** А. **16.** Б. **17.** Б. **18.** В. **19.** Г. **20.** В. **21.** 1–Д; 2–А; 3–Б; 4–В. **22.** 1–В; 2–Д; 3–Г; 4–Б. **23.** 1–Б; 2–Г; 3–Д; 4–А. **24.** 1–А; 2–Д; 3–Б; 4–А. **25.** 3. **26.** 5. **27.** 24. **28.** 375. **29.** 4. **30.** 135°. **31.** 1,4. **32.** 4.

Зошит 2

1. А. **2.** Д. **3.** Д. **4.** В. **5.** А. **6.** А. **7.** А. **8.** В. **9.** Б. **10.** Г. **11.** В. **12.** Д. **13.** Д. **14.** Д. **15.** Г. **16.** В. **17.** Д. **18.** А. **19.** Г. **20.** А. **21.** 1–Б; 2–Д; 3–Г; 4–В. **22.** 1–Б; 2–В; 3–А; 4–Г. **23.** 1–В; 2–А; 3–Б; 4–Д. **24.** 1–Б; 2–Г; 3–А; 4–Д. **25.** –16. **26.** 6. **27.** 7. **28.** 12. **29.** 100. **30.** 5. **31.** 45°. **32.** 162.

Розв’язання завдання 32 ЗНО 2012 (ІІ сесія, зошит 13)

32. $\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+(14-2a)\sqrt[4]{x-3}+32=6a$;

$\sqrt{\left(1+\sqrt{x-3}\right)^2}+(14-2a)\sqrt[4]{x-3}+32=6a$;

$\left|1+\sqrt{x-3}\right|+(14-2a)\sqrt[4]{x-3}+32=6a$.

Оскільки при всіх $x \geq 3$ правильною є нерівність $1+\sqrt{x-3}>0$, то маємо:

$$1+\sqrt{x-3}+(14-2a)\sqrt[4]{x-3}+32=6a;$$

$$\left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2-2(a-7)\sqrt[4]{x-3}-6a+33=0.$$

Нехай $\sqrt[4]{x-3}=t, t\geq 0$. Тоді маємо квадратне рівняння: $t^2-2(a-7)t-$ $-6a+33=0$. Знайдемо, при яких значеннях параметра a рівняння має хоча б один невід’ємний корінь.

$\frac{D}{4}=(a-7)^2-1\cdot(-6a+33)=a^2-14a+49+6a-33=a^2-8a+16=$ $=(a-4)^2$; $t=a-7\pm|a-4|$; $\left[\begin{array}{l} t_1=a-7-a+4, \\ t_2=a-7+a-4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} t_1=-3, \\ t_2=2a-11. \end{array}\right.$ Але $t_1<0$, тому цей корінь сторонній. Тепер $t_2=2a-11$ має бути невід’ємним; $2a-11\geq 0$; $a\geq 5{,}5$. Отже, при найменшому значенні параметра $a=5{,}5$ рівняння має розв’язки.