

КЛАСИКИ ПОПУЛЯРИЗАЦІЇ НАУКИ
Математичні заманики

Б.А. Кордемський

Незвичайне — у звичайному
Книга восьма



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
К66

Загальну серію “Класики популяризації науки” засновано у 2007 році

Кордемський Б.А.

К66 Незвичайне — у звичайному. Книга восьма: Пер. з рос. / Заг. ред. В.К. Дячуна. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2009. — 48 с; іл. (Класики популяризації науки; Математичні заманинки).

ISBN 978-966-10-0697-2

Восьма книга із серії «Математичні заманинки» майстра науково-популярної літератури Бориса Анастасійовича Кордемського — збірник математичних мініатюр: різноманітних цікавих есеїв, фантазій і просто задач, дошукавшись розв’язку яких, можна відкрити «незвичайне — у звичайному».

Усі, хто захоплюється математикою, — незалежно від віку — матимуть можливість потренувати мислення, кмітливість та винахідливість.

ББК 22.1я72

Навчальне видання

КОРДЕМСЬКИЙ Борис Анастасійович
НЕЗВИЧАЙНЕ — У ЗВИЧАЙНОМУ

Книга восьма

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Володимир Басалига*

Дизайн та комп’ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 13.03.2009. Формат 70×100/24. Папір офсетний.

Гарнітура Century SchoolBook. Умовн. друк. арк. 2,58. Умовн. фарбо-відб. 2,58.

Охороняється законом про авторське право.

*Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-0697-2



9 | 789661 | 006972

ISBN 978-966-408-435-9 (серія)
ISBN 978-10-0697-2

© Луковцева А.К., Фохт О.Б., спадкоємці, 2005

© Кравчук А.В., Дячун В.К., переклад, 2009

© Дячун В.К., передмова, примітки, загальна редакція, 2009

© Навчальна книга – Богдан, макет, художнє оформлення, 2009

Зміст

Передмова до українського видання	4
Передмова до російського видання	6
Примхи календаря	7
Числа-«самородки»	7
Чи може таке бути... ..	8
А ще знайдете?.....	9
Яка совість у вас?.....	10
Незвичайна манера запрошення, та все-ж... ..	10
Примітні числа	11
Незвичайне — у звичайному	11
Маршрут через 5 точок (головоломка).....	11
Прихована естетика шестизначного числа	12
Клітки-сусідки	12
Примхливі сусідки (продовження).....	13
«Не вір очам своїм»	13
Картинки рівномірних процесів... ..	14
Чарівна краса магічних квадратів.....	19
Студентки складають екзамен зі стрибків у висоту	20
Дуель по-угорськи	20
Дивини серед простих чисел.....	21
Цікаві зграйки простих чисел.....	23
Досконалі числа.....	27
Математизована юриспруденція.....	29
Майк, який програвся, прагне реваншу.....	34
Сценарій — наш, виконавець — комп'ютер.....	34
Розв'язки	36

Передмова до українського видання

Це видання — переклад книги «Математические завлекалки» Б.А. Кордемського (1907–1999 рр.), метра російської науково-популярної літератури, книги, яка, на жаль, виявилася останньою в його значному творчому доробку. А це — ціла низка різноманітних і захоплюючих книг, які, пробуджуючи цікавість до математики, сприяли вихованню математичного мислення, розвитку ініціативи та кмітливості у багатьох поколінь учнів.

У праці, в навчанні, у грі, у будь-якій творчій діяльності людині потрібні, за словами Кордемського, винахідливість, спритність, здогад, уміння міркувати, — усе те, що можна означити одним словом як кмітливість, або ж, рівноцінним, соковитим, — тямущість. Її ж, цю тямущість, можна виховати й розвинути систематичними і поступовими вправами, зокрема, розв'язуванням математичних задач як шкільного курсу, так і задач, що виникають з практики, пов'язаних із спостереженням довколишнього світу речей та явищ, — особливо ж розв'язуванням математичних головоломок, ребусів, задач з інтригуючим змістом. Можливо, в наш прагматичний час елементи «інтриги», «приваби», врешті, «заманювання» відіграють чи не найвирішальнішу роль.

Тепер ось маємо й україномовну версію математичних «заманинок» (до речі, теж своєрідний український «новотвір» — адже слово сконструйоване на основі «заманливого», тобто чогось привабливого, приємного тощо — тут і відлуння діалектної «заманки» — «принади»). У вітчизняному інформаційному просторі оприсутнюються персонажі книги: Жвавчик (в оригіналі «Шустрик») та Мимрик («Мямлік»). Перший — меткий, заповзятливий, спритний. І: розсудливий, дещо стриманий, — другий. В математиці обидва типи особистостей і, отже, підходів потрібні в однаковій мірі — бо, як правило, початкове емоційне сприйняття умови задачі (чи її «інтриги») повинно, вре-

шти, урівноважитись вдумливим, спокійним аналізом усіх можливих розгалужень та варіантів розв'язання цієї задачі.

Дві стихії (знову ж таки, за висловом Кордемського) панують в царині математики — числа й фігури з їхнім нескінченним різноманіттям властивостей і взаємозв'язків. Задача — це майже завжди пошук, розкриття цих властивостей і співвідношень, а засоби її розв'язку — це інтуїція та здогад, ерудиція й володіння методами математики. Стихія чисел і фігур, притаманна математиці, панує, отже, на кожній сторінці кожної із книг цієї серії — починаючи від «усілякої всячини», проходячи через «галерею казок і фантазій», переживаючи «події та пригоди на стежинках математики», розкриваючи «маленькі таємниці чисел та фігур», спостерігаючи «незвичайне — у звичайному» і, врешті, «роблячи відкриття».

Особливої уваги заслуговує так звана «поетикоарифметика», розсипана по усьому тексту — це і вірші, поетичні уривки, епіграфи, заголовки тощо. На перший погляд, цей «калейдоскоп» може видатись строгому математику зайвим чи надто «переобтяженим поезією» — проте, заглибившись у цей поетичний світ чисел та фігур, мимоволі зачаровуєшся магією цієї стихії. Звичайно ж, адекватність перекладу вимагала досить доскіпливого підходу до поетичних текстів, написаних в різні епохи людської історії та й у досить відмінних стилях. Інколи це вимагало до «примітивного» версифікування знаходити такі ж адекватні «примітивності» або ж на уже зроблений переклад з інших мов російською в оригіналі «накладати» український переклад.

Загалом, певні удосконалення розв'язків задач (і це відображено у відповідних примітках), усунення деяких помилок та неточностей, а також проведена стилістична правка тексту, на нашу думку, тільки розширить коло зацікавлених українських читачів цієї захоплюючої книги «заманинок».

Передмова до російського видання

Лише забавляючись і вчимося.

Анатоль Франс

Пропоновані тут математичні мініатюри — цікаві есеї й казочки, фантазії та просто задачі, легкі й важкі, але завжди загальнодоступні, такі, що тренують і шліфують власне мислення, — об'єднані загальною назвою “заманинки”. Звідси й мета книги — улюбити вас, читачів, у найдавнішу, проте вічноквітучу науку — математику, світ якої, не менше, ніж світ живої та неживої природи, повен нерозгаданих і розгаданих таємниць, дивовижних і драматичних явищ, захоплюючих подій та вражаючих відкрить.

Творча активність, спритність, винахідливість та кмітливість досягають найвищої напруги та отримують зразкове тренування, коли думка захоплена прагненням розв'язати задачу, котра зацікавила. Знайдений розв'язок або навіть читання викладеного дотепного розв'язку завжди викликають розумове задоволення, естетичну насолоду.

Легкий гумор фабули, несподіваність ситуації чи розв'язки, спричинюваних розв'язанням задачі, стрункість геометричних форм, вишуканість розв'язку, під яким розуміють поєднання простоти й оригінальності методів його одержання — ось основні елементи естетики цікавих задач “на кмітливість”, і такі от збудники сил притягання уваги думуючої людини.

Пропонована книга “заманинок” безпосередньо не вчить математиці, але в години вашого активного відпочинку зможете поблукати стежинками математики, піднятіся по сходинках пізнання від нижчої: досвіду, споглядання, накопичення спостережень — до подальшої: розуміння теоретичних основ споглядуваного матеріалу, висновків зі спостережень. Бажаю успіху!

Б.А. Кордемський

На те, що двічі два — чотири,
Наука ширишу має міру.*

І. Шаров

Примхи календаря

1. Календарю деякого року потрібно було сформувати один місяць (а, можливо, й не один) так, щоб понеділків у цьому місяці виявилось більше, ніж вівторків, а субот менше, аніж неділь.

Який день тижня був 5-го числа цього місяця? Чи міг цей місяць бути літнім: лишнем чи серпнем?

2. Який день тижня був 5-го числа того місяця, у якому *три* неділі припадали на парні числа?

Числа-«самородки»

Візьмемо довільне натуральне число, наприклад, 13. Додамо до нього суму його цифр, утвориться число 17. До цього результату теж додамо суму його цифр, утвориться 25. Продовжуючи так діяти, одержимо послідовність чисел: 13, 17, 25, 32, 37, 47,

З'ясуємо, чи можна отриману послідовність продовжити вліво, тобто чи існує натуральне число, яке у сумі з його ж цифрами дало б 13. Пробуємо 12; $12 + 3 = 15$ — не те. Пробуємо 11; $11 + 2 = 13$ — добре. Отже, перед числом 13 у нашій послідовності повинно бути 11. А перед ним? Пробуємо 10; $10 + 1 = 11$ — добре. А перед числом 10? Тут і без перебору зрозуміло, що числу 10 буде передувати 5. Справді, $5 + 5 = 10$. Але для числа 5 немає попередника серед натуральних чисел.

* Віршовані епіграфи перекладені В.К. Дячуном.

Таким чином, у послідовності 5, 10, 11, 13, 17, 25, ... всі числа, крім п'ятірки, «сформовані» за єдиним правилом, а число 5 виявилося мовби «самородком».

Запрошуємо допитливих відправитися в пошуки інших «самородків», аналогічних числу 5.

Однозначні «самородки» виявляються відразу. Це, мабуть, 1, 3, 5, 7 і 9.

Із двозначних найменшим «самородком» буде число 20 (легко переконалися безпосередньо, що жодне з чисел від 1 до 19 у сумі з його ж цифрами не утворює 20). Наступний двозначний «самородок» — число 31 (переконайтеся!).



Задача. Які ще двозначні числа є «самородками»?

Є колекція «самородків» і серед багатозначних чисел. Наприклад: 143, 233, 929, 1952, 874531, тощо. Не так-то легко було виявити їх! Є тризначний «самородок» і менший ніж 143. Знайдіть-но його!

Чи може таке бути...

щоб сума чисел дорівнювала сумі квадратів тих самих чисел:

$$a + b = a^2 + b^2,$$

$$a + b + c = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$a + b + c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \text{ тощо?}$$

Рівності, справді, виглядають інтригуючими, оскільки піднесення до квадрата і, взагалі, множення, психологічно зазвичай сприймається як збільшення. Зрозуміло, що для цілих чисел ці рівності неможливі, але чи немає підхожих дробових чисел, адже правильний дріб при множенні на себе стає ще меншим?

Виявляється: є, причому — безліч для кожної рівності зазначеного виду.
Приклади? — Будь ласка:

$$\frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2,$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

$$\frac{3}{7} + \frac{6}{7} + \frac{7}{7} + \frac{9}{7} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{7}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2.$$

Чи легко підібрати потрібні дроби? Спробуйте!

А потім, якщо хочете, повідомлю по секрету цікавий рецепт їхнього «приготування», наприклад, для чотирьох доданків: берете довільні 4 натуральні числа. Нехай, взяли 1, 3, 4 і 7. Кожне множите на дріб $\frac{1+3+4+7}{1^2+3^2+4^2+7^2} = \frac{1}{5}$ і ... продукція готова:

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2.$$

Рецепт дійсний для будь-якої бажаної кількості доданків. Переконайтеся!

А ще знайдете?

Скільки ви можете винайти чисел, кожне з яких є середнім арифметичним його ж цифр? Наприклад, якщо число x (ціле або дробове) містить три цифри a , b , c , то повинно бути:

$$x = \frac{a+b+c}{3}.$$

У моїй колекції поки що сім чисел з такою властивістю. Ось одне:

$$\frac{10}{5} = \frac{1+0+5}{3}.$$

Чекаю від вас поповнення цієї надзвичайної колекції. Для порівняння своїх винаходів з моїми, загляньте на с. 37 цієї книги.

Яка совість у вас?

*Візьміть-бо олівець,
 Щоб написати: СОВІСТЬ, —
 Її згадайте, а коли
 Ви думали про неї?!*

З пісні, почутої по радіо

Моя СОВІСТЬ — число квадратне:

$$\begin{aligned} \text{СОВІСТЬ} &= 1028196 & (=1014^2) \\ \text{СОВІСТЬ} & & (\text{СОСИ}^2). \end{aligned}$$

А ваша? Сподіваюся, вона також — число квадратне, але при інших значеннях С, О, В та решти букв?

Незвичайна манера запрошення, та все-ж...

У місті проводився симпозиум лікарів. Від кожної поліклініки міста були запрошені по 4 лікарі. Кожен із запрошених працював у двох поліклініках і представляв на цьому симпозиумі обидві поліклініки. Однак будь-яке можливе об'єднання двох поліклінік було представлено одним і тільки одним лікарем. Відомості скупі, і все-таки їх цілком достатньо, щоб визначити, скільки поліклінік у місті, і скільки лікарів було запрошено на симпозиум.