

Передмова

Мета пропонованого посібника — надати допомогу випускникам загальноосвітніх навчальних закладів, ліцеїв, гімназій та вчителям у процесі підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) та державної підсумкової атестації (ДПА).

Посібник складається з дев'яти розділів, в яких зібрані завдання з теми «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи». Також у посібнику містяться завдання, які відсутні у шкільних підручниках, такі як «Раціональні рівняння, нерівності та їхні системи з параметрами».

Поняття параметр, згідно з базовими підручниками, вводиться у курсі математики загальноосвітньої школи у сьомому класі, хоча до розв'язання завдань даної тематики приділяється занадто мало уваги, як у сьомому класі, так і у старших класах (крім спеціалізованих).

Засвоєння поняття параметра сприяє формуванню в учнів абстрактного та алгоритмічного видів мислення та пошукової евристичної діяльності.

Система вправ розроблена від найпростіших завдань на поняття параметра до завдань олімпіадного рівня.

У порівнянні зі звичайними завданнями задачі з параметрами є набагато складнішими для школярів і абітурієнтів, але такі вправи стали невід'ємним атрибутом ЗНО з математики. Тому кожний розділ даного посібника містить докладно розв'язані приклади, систему вправ для самостійного розв'язування та відповіді, що допоможе учням оволодіти вмінням досліджувати раціональні рівняння, нерівності та системи з параметрами.

Даний посібник може бути використаний для детального повторення матеріалу в період підготовки до ЗНО та ДПА.

1. Раціональні рівняння.

Модуль в раціональних рівняннях

Рівень 1

1. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^2 + 144x = 0$; б) $x^2 - 14 = 0$; в) $x^2 + 14 = 0$;
г) $x^2 = 40$; ґ) $x^2 = -3x$?
2. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^2 - 15x = 0$; б) $x^2 - 13 = 0$; в) $x^2 + 5 = 0$;
г) $x^2 = 49$; ґ) $x^2 = -x$?
3. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^2 = 36$; б) $x^2 = 10x$; в) $x^2 - 4 = 0$;
г) $x^2 + 7 = 0$; ґ) $x^2 = x + 12$?
4. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^2 + 7 = 0$; б) $x^2 - 16x = 0$; в) $x^2 = 9$;
г) $x^2 - 10 = 0$; ґ) $x^2 = 3x + 2$?
5. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 6x + 9 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.
6. Скільки коренів має рівняння $2x^2 - 9x - 5 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.
7. Скільки коренів має рівняння $2x^2 - 3x + 4 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.
8. Скільки коренів має рівняння $3x^2 + 13x + 4 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.
9. Скільки коренів має рівняння $3x^2 + 5x + 4 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 12x + 36 = 0$?
а) Один; б) два; в) жодного;
г) безліч; ґ) інша відповідь.

11. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$ дорівнює:
а) 3; б) 4; в) -3;
г) -4; г) інша відповідь.
12. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 + 3x - 10 = 0$ дорівнює:
а) 3; б) 10; в) -10;
г) -3; г) інша відповідь.
13. Сума коренів квадратного рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$ дорівнює:
а) -8; б) 15; в) 8;
г) -15; г) інша відповідь.
14. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ дорівнює:
а) 2; б) -2; в) 8;
г) -8; г) інша відповідь.
15. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнює:
а) 21; б) -4; в) 4;
г) -21; г) інша відповідь.
16. Добуток коренів квадратного рівняння $x^2 + 5x - 14 = 0$ дорівнює:
а) -14; б) 14; в) 5;
г) -5; г) інша відповідь.
17. Добуток коренів квадратного рівняння $3x^2 + 11x - 4 = 0$ дорівнює:
а) $-\frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{11}{3}$; г) $-\frac{11}{3}$; г) $\frac{3}{4}$.
18. Добуток коренів квадратного рівняння $5x^2 + 13x - 6 = 0$ дорівнює:
а) $-\frac{6}{5}$; б) $\frac{6}{13}$; в) $\frac{13}{5}$; г) $-\frac{13}{5}$; г) $\frac{5}{6}$.
19. Добуток коренів квадратного рівняння $6x^2 - 5x + 1 = 0$ дорівнює:
а) 1; б) $-\frac{1}{6}$; в) $-\frac{5}{6}$; г) $\frac{1}{6}$; г) -1.
20. Сума коренів квадратного рівняння $4x^2 - 11x - 3 = 0$ дорівнює:
а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $-\frac{11}{4}$;
г) $\frac{11}{4}$; г) інша відповідь.

- 21.** Сума коренів квадратного рівняння $4x^2 + 5x - 6 = 0$ дорівнює:
- а) $-\frac{5}{4}$; б) $\frac{5}{4}$; в) $-\frac{3}{2}$;
 г) $\frac{3}{2}$; г) інша відповідь.
- 22.** Сума коренів квадратного рівняння $3x^2 + 11x - 4 = 0$ дорівнює:
- а) -11 ; б) $-\frac{11}{3}$; в) $-\frac{4}{3}$;
 г) $\frac{11}{3}$; г) інша відповідь.

Рівень 2

- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 0$.
- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$.
- Знайти найбільший корінь рівняння: $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x + 5| = 7$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|2x - 1| = 5$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|x - y| + |4 - x| = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $|2x - y| + 2|x - 2| = 0$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|2 - 3x| = x + 3$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|4 - 2x| + x = 2, 6$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|1 - 2x| = x + 0, 3$.
- Знайти найбільший розв'язок рівняння: $|4 - 3x| + 0, 2 = x$.
- Знайти кількість розв'язків рівняння: $|3 - x| = x - 3$.
- Знайти кількість розв'язків рівняння: $|5x + 1| = 5x + 1$.
- Розв'язати рівняння: $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.
- Розв'язати рівняння: $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.
- Знайти суму розв'язків рівняння: $\|x + 2| - 1| = 4$.

19. Знайти суму розв'язків рівняння: $\|x - 1| - 3| = 2$.
20. Знайти розв'язок рівняння $|x - 3| - |2 - x| = -0,4$ з проміжку $(2; 3)$.
21. Знайти розв'язок рівняння $|x - 1| - |x + 2| = 1$ з проміжку $(-2; 1)$.
22. Розв'язати рівняння: $|x^2 + x - 3| = x$.
23. Розв'язати рівняння: $|x^2 + 2x - 3| = |x - 1|$.
24. Розв'язати рівняння: $|4x^2 + 3x - 2| = |3x - 4|$.
25. Розв'язати рівняння: $|x^2 - 5x + 6| = |x + 4|$.
26. Розв'язати рівняння: $|x^2 - 1| = |5 - x^2|$.
27. Розв'язати рівняння: $|x + 5| + |x - 8| = 13$.
28. Розв'язати рівняння: $|x| - |x - 2| = 2$.
29. Розв'язати рівняння: $x^2 - 4x + |x - 3| + 3 = 0$.
30. Розв'язати рівняння: $x^2 - 6x + |1 - x| + 5 = 0$.
31. Розв'язати рівняння: $|x^2 - 25| + |x^2 - 1| = 24$.
32. Розв'язати рівняння: $x^2 - 2x \frac{x - 1}{|x - 1|} - 3 = 0$.
33. Розв'язати рівняння: $x^2 - 5x \frac{|x - 3|}{x - 3} + 6 = 0$.

Рівень 3

1. Розв'язати рівняння: $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.
2. Розв'язати рівняння: $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9 = 0$.
3. Розв'язати рівняння: $15x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1 = 0$.
4. Розв'язати рівняння: $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = 0$.
5. Розв'язати рівняння: $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
6. Розв'язати рівняння: $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$.
7. Розв'язати рівняння: $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) = 12$.
8. Розв'язати рівняння: $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$.
9. Розв'язати рівняння: $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.
10. Розв'язати рівняння: $(2x - 3)(2x - 1)(x + 1)(x + 2) = 36$.
11. Розв'язати рівняння: $(x + 2)(x + 1)(x - 3)(x + 6) = -96$.

5. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} 2|x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ має вісім різних розв'язків?
6. Знайти всі значення параметрів a та b , при яких система рівнянь $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ |x| + |y| + z^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.
7. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} (x + y)^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 2(a + 1) \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
8. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ (x + y)^2 = 16 \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
9. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має рівно три розв'язки.
10. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ має єдиний розв'язок?
11. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |x| + y = a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?
12. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases} (x - y)^2 = 6a - 14, \\ x^2 + y^2 = 3(2 + a) \end{cases}$ має два розв'язки.
13. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Приклади розв'язування завдань

Рівень 2

4. в) Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь
- $$\begin{cases} 2x + ay = 2 + a, \\ (a+1)x + 2ay = 4 + 2a \end{cases}$$
- має нескінченну кількість розв'язків.

Розв'язання. Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має нескінченну кількість розв'язків тоді і тільки тоді, коли прямі, що визначаються першим і другим рівняннями, співпадають. А це можливо тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти рівнянь системи пропорційні, тобто $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Таким чином, в задачі потрібно знайти всі значення

параметра a , при яких виконуються рівності $\frac{2}{a+1} = \frac{a}{2a} = \frac{2+a}{4+2a}$,

що можна записати у вигляді системи двох рівнянь
$$\begin{cases} \frac{2}{a+1} = \frac{a}{2a}, \\ \frac{a}{2a} = \frac{2+a}{4+2a}. \end{cases}$$

Якщо $a \notin \{0; 2\}$, то друге рівняння перетворюється у тотожність, а перше набуває вигляду $\frac{2}{a+1} = \frac{1}{2}$. Розв'язком останнього рівняння є значення $a = 3$.

Якщо $a = 0$, початкова система набуває вигляду
$$\begin{cases} 2x = 2, \\ x = 4. \end{cases}$$
 Вона не сумісна.

Зрештою, поклавши $a = -2$ у початкову систему, одержимо систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0, \\ -x - 4y = 0. \end{cases}$$
 Вона має єдиний розв'язок $x = y = 0$.

Отже, початкова система рівнянь має нескінченну множину розв'язків при $a = 3$.

Відповідь. 3.

Зміст

Передмова	3
1. Раціональні рівняння. Модуль в раціональних рівняннях.....	4
2. Параметри в раціональних рівняннях	10
3. Раціональні нерівності	17
4. Параметри в раціональних нерівностях	24
5. Системи раціональних рівнянь	29
6. Системи раціональних рівнянь з параметрами	36
7. Системи раціональних нерівностей. Модуль в системах раціональних нерівностей.....	41
8. Системи раціональних нерівностей з параметрами	46
9. Графічний метод розв'язання раціональних рівнянь, нерівностей та їхніх систем з параметрами	50
Відповіді	60
Література	68