

ВАШ ДОМАШНІЙ РЕПЕТИТОР

**В.С. Крамор**

# ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ і методи їх розв'язання

Переклад з російської  
Андрія Кравчука



ТЕРНОПІЛЬ  
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 512.1(075.3)  
ББК 22.14я72  
К78

**Крамор В. С.**  
К78    Задачі на складання рівнянь і методи їх розв'язання. —  
Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 272 с.  
**ISBN 978-966-10-2604-8**

Мета книги — навчити школярів і абітурієнтів вищів самостійно розв'язувати задачі на складання рівнянь та допомогти міцно засвоїти різні методи їх розв'язання.

Посібник містить понад 300 типових задач із методичними вказівками і 100 задач для самостійного розв'язання та відповіді до них.

Книга може бути використана при підготовці до випускних іспитів у середній школі, до зовнішнього незалежного оцінювання й вступних іспитів у вищі навчальні заклади.

УДК 512.1(075.3)  
ББК 22.14я72

*Охороняється законом про авторське право.  
Жодна частина цього видання не може бути відтворена  
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

**ISBN 978-966-10-2604-8**

© Навчальна книга – Богдан,  
майнові права, 2012

## ПЕРЕДМОВА

Упродовж тривалого часу задачі на складання рівнянь входять в екзаменаційні білети з математики для абітурієнтів вищих навчальних закладів, а в останні роки такі задачі входять до ЗНО. Вміння розв'язувати ці задачі дозволяє перевірити у майбутніх студентів логічне мислення, кмітливість і спостережливість, а також здатність до аналізу отриманих результатів.

Водночас у загальноосвітній школі задачам на складання рівнянь приділяється недостатньо уваги. Ціль даної книги полягає в тому, щоб навчити випускників середньої школи розв'язувати задачі подібного роду і міцно засвоїти різні методи, які застосовуються в процесі їх розв'язування.

Увесь викладений у книзі матеріал розбито на 5 розділів, що складаються з декількох параграфів. Кожен параграф містить невеликий довідковий матеріал (основні формули, твердження, припущення, які використовуються при розв'язуванні задач розглянутого типу) і набір задач з детальними розв'язками. Наприкінці кожного розділу наведено задачі для самостійного розв'язування й відповіді до них.

Загалом книга містить понад 300 задач з розв'язками, а також 100 задач для самостійного розв'язування.

Поряд із традиційними типами задач (задачі на відсотки; задачі на розчини, суміші, сплави; задачі на рух; задачі на роботу) у книзі розглянуто й інші типи задач (задачі на числові залежності; задачі, що зводяться до нерівностей; задачі з цілочисельними невідомими тощо).

Наведені у книзі розв'язки задач детально пояснено, кожную дію у процесі розв'язання пронумеровано, оскільки вона несе певне значення навантаження. Всі етапи розв'язання містять необхідну інформацію про правомірність того чи іншого кроку.

Кожен розділ завершено параграфом «Різні задачі», в якому вміщено велику кількість задач, що стосуються до даного розділу (а в

низці задач і до інших, уже розглянутих раніше розділів). Це дозволяє контролювати вміння учня розв'язувати упереміш задачі з даного розділу.

Наприкінці книги наведено список літератури, якою користувався автор під час роботи над цим виданням. Багато задач, взяті зі значених посібників, входили в екзаменаційні білети для вступників у різні ВНЗ країни.

Автор сподівається, що дана книга виявиться добрим помічником усім, хто буде користуватися нею в процесі навчання й при підготовці до іспитів.

Успіхів вам, школярі й абітурієнти!

Автор

## Розділ 1

# Задачі на відсотки

### 1. ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСОТКІВ ДАНОГО ЧИСЛА. СКЛАДНІ ВІДСОТКИ

1°. *Відсотком* називають соту частину якого-небудь числа. Позначення:  $1\% = 0,01$ .

2°. Відсоток даного числа  $a$  — це число  $0,01a$ . Позначення:  $1\% (a) = 0,01a$ .

3°. Визначити  $p\%$  від даного числа  $a$  означає знайти число  $0,01pa$ . Позначення:  $p\% (a) = 0,01pa$ .

Наприклад, щоб знайти  $17\%$  від числа  $650$ , треба дріб  $0,17$  помножити на  $650$ , тобто  $0,17 \cdot 650 = 11,05$ .

4°. Часто виникають ситуації, коли потрібно знайти відсотки від відсотків.

а) Нехай деяка величина  $A_0$  змінюється на  $p\%$ , тоді її нове значення  $A_1$  дорівнюватиме:

$$A_1 = A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100} = A_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right).$$

б) Нехай тепер величина  $A_1$  змінюється знову на  $p\%$ , тоді її нове значення  $A_2$  дорівнюватиме:

$$A_2 = A_1 \left( 1 + \frac{p}{100} \right) = A_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

в) Якщо ця дія виконується  $k$  разів, то остаточне значення розглянутої величини  $A_k$  дорівнюватиме:

$$A_k = A_0 \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^k. \quad (1)$$

г) Якщо величина  $A_0$  змінюється перший раз на  $p_1\%$ , другий раз — на  $p_2\%$ , ..., останній раз — на  $p_k\%$ , то остаточне значення цієї величини обчислюють за формулою:

$$A_k = A_0 \left( 1 + \frac{p_1}{100} \right) \left( 1 + \frac{p_2}{100} \right) \dots \left( 1 + \frac{p_k}{100} \right). \quad (2)$$

5°. Формули (1) і (2) називають *формулами складних відсотків*.

## Розділ 4

# Задачі на роботу

### 1. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ОБЧИСЛЕННЯ КОМПОНЕНТІВ РОБОТИ

1°. Задачі на роботу здебільшого схожі із задачами на рух. Основними компонентами в задачах на роботу є:

- об'єм роботи ( $A$ );
- продуктивність праці ( $W$ ), тобто кількість одиниць роботи, що виконуються за одиницю часу (швидкість виконання роботи);
- час виконання всієї кількості роботи ( $t$ ).

2°. Залежність між цими величинами нагадує залежність між відповідними компонентами руху:

$$A = Wt, W = \frac{A}{t}, t = \frac{A}{W}. \quad (1)$$

3°. Якщо об'єм роботи виражається в яких-небудь одиницях, то продуктивність праці вимірюється в од./хв, од./год, од./день тощо. Наприклад, продуктивність верстата може виражати кількість деталей, які він виготовляє за хвилину, годину, день тощо.

### Задачі з розв'язками

1. Одна тракторна бригада зорала 240 га, а друга — на 35% більше, ніж перша. Щодня перша бригада зорювала на 3 га менше, ніж друга, але закінчила роботу на два дні раніше від другої. Скільки гектарів землі зорювала кожна бригада за один робочий день, якщо відомо, що заплановану денну норму в 20 га перевиконували дві бригади?

1. Насамперед відзначимо, що друга бригада зорала поле площею в  $135\%(240) = 324$  (га).

2. Позначимо через  $x$  (га/день) продуктивність другої бригади (тобто  $x$  — кількість зраних гектарів у день).

3. Складемо таблицю.

Компоненти роботи	Перша бригада	Друга бригада
Об'єм роботи (га)	240	324
Продуктивність (га/день)	$x - 3$	$x$
Час (дні)	$\frac{240}{x - 3}$	$\frac{324}{x}$

4. З огляду на те, що перша бригада працювала на два дні менше, одержуємо рівняння

$$\frac{324}{x} - \frac{240}{x - 3} = 2, \text{ або } x^2 - 45x + 486 = 0, x_1 = 27, x_2 = 18.$$

5. Оскільки, за умовою,  $x > 20$ , то шукана продуктивність другої бригади дорівнює  $x = 27$ . Тоді продуктивність першої бригади дорівнює  $x - 3 = 24$ .

6. Відповідь: 24 га/день; 27 га/день.

2. Бригада робітників повинна була виготовити за зміну 7200 деталей, причому кожен робітник планував виготовити однакову кількість деталей. Однак троє робітників занедужали, тому кожен з решти робітників мав виготовити на 400 деталей більше, щоб виконати норму. Скільки робітників було в бригаді спочатку?

1. Позначимо шукану кількість робітників через  $n$ . Тоді кожен робітник за зміну повинен був виготовити  $\frac{7200}{n}$  деталей (це планова продуктивність робітника).

2. Насправді було  $(n - 3)$  робітників, тому кожен виготовляв по  $\frac{7200}{n - 3}$  деталей (фактична продуктивність).

3. Оскільки фактична продуктивність була вищою від планової на 400 деталей, то одержуємо рівняння

$$\frac{7200}{n - 3} - \frac{7200}{n} = 400, \text{ або } \frac{18}{n - 3} - \frac{18}{n} = 1, \text{ або } n^2 - 3n - 54 = 0,$$

звідки  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = -6$  (не підходить за змістом задачі).

4. Відповідь: 9 робітників.

шого автомобіля, якщо він приїжджає в місто  $B$  одночасно з другим. У яких межах може змінюватися швидкість  $v$  першого автомобіля за умови, що він приїжджає в місто  $B$  не пізніше від другого?

**16.** Човен пливе за течією річки 10 км, а потім піднімається проти течії на 6 км. Швидкість течії річки дорівнює 1 км/год. Знайти власну швидкість човна, якщо вся поїздка зайняла 4 год. У яких межах може змінюватися швидкість човна, щоб уся поїздка зайняла від трьох до чотирьох годин?

**17.** Човен, швидкість якого дорівнює  $u$  км/год, пливе по річці проти течії. Через  $l$  км шляху річка впадає в озеро зі стоячою водою. З якою власною швидкістю  $v$  повинен рухатися човен, щоб загальну відстань  $s$  км він пройшов за  $t$  год?

**18.** Для оплати пересилки чотирьох бандеролей знадобилося чотири різних марки на загальну суму 28 грн. Знайти вартості марок, придбаних відправником, якщо вони утворюють арифметичну прогресію, а найдорожча марка у 2,5 рази дорожча від найдешевшої.

**19.** Олексій, Борис і Володимир купили олівці вартістю 3 грн. і блокноти. Олексій купив 4 олівці і 2 блокноти, Борис — 6 олівців і блокнот, Володимир — 3 олівці і блокнот. Виявилось, що сплачені ними суми утворюють геометричну прогресію. Скільки коштує блокнот?

**20.** Щоб загородити клумбу у формі кругового сектора, взяли кусок дроту завдовжки 20 м. Який радіус кола варто взяти, щоб площа клумби була найбільшою?

## Відповіді

1. 91. 2. 83. 3. 321. 4. 9. 5.  $\frac{4}{15}$ . 6. 27. 7. 11 робітників; 17 робітників. 8. 9 білих і 13 червоних. 9. 62,5% і 55%. 10. 60 км/год. 11.  $\frac{pm + \sqrt{p^2m^2 + 4mnp}}{2p}$ ;  $\frac{\sqrt{p^2m^2 + 4mnp} - pm}{2p}$ . 12.  $\frac{4b - 3ak + \sqrt{D}}{6k}$ ;  $\frac{4b + 3ak + \sqrt{D}}{6k}$ , де  $D = 16b^2 + 9a^2k^2$ . 13.  $\frac{9k+1}{k-1} \cdot a\%$ . 14. У відношенні  $(r - q) : (p - r)$ . 15. 40 км/год;  $10 < v \leq 40$ . 16. 4 км/год;  $4 \leq v \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3}$ . 17.  $v > \frac{s + ut + \sqrt{(s - ut)^2 + 4utl}}{2t}$  км/год. 18. 4 грн.; 6 грн.; 8 грн.; 10 грн. 19. 18 грн. 20. 5 м.

## Використана література

- Александров Б.И., Лурье М.В.* Пособие по математике для поступающих в МГУ. — М., 1977.
- Александров Б.И., Лурье М.В., Максимов В.М.* Пособие по подготовке к письменному экзамену по математике в МГУ. — М., 1972.
- Андреев П.А., Гладких И.М., Ермаков В.И. и др.* Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в РЭА им. Г.В. Плеханова в 1999–2006. — М., 2006.
- Баранов А.И.* Конкурсные задачи по математике. — М., 1969.
- Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. — М., 2006.
- Егерева В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др.* /Под ред. Сканава М.И. Сборник задач по математике (с решениями). — М., 2006.
- Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А.* Типовые задачи конкурсных экзаменов по математике. — М., 1996.
- Крамор В.С.* Готовимся к экзамену по математике. — М., 2006.
- Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. — М., 2006.
- Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры (в трех книгах). — М., 2001.
- Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х.* /Под. ред. Яковлева Г.Н. Пособие по математике для поступающих в вузы. — М., 2002.
- Куценко В.С.* Сборник конкурсных задач по математике с решениями. — Л., 1968.
- Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И.* Задачи по элементарной математике. — М., 1969.
- Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Задачник-практикум по математике. — М., 2005.
- Лурье М.В., Александров Б.И.* Задачи на составление уравнений. — М., 1976.
- Максимов В.М.* Пособие по математике для поступающих в МГУ. — М., 1972.
- Моденов В.П.* Математика. Пособие для поступающих в вузы. — М., 2002.
- Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.* Варианты экзаменационных задач по математике для поступающих в вузы. — М., 2001.
- Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др.* Система тренировочных задач и упражнений по математике. М., 1991.
- Шахно К.У.* Как готовится к приемным экзаменам в вузы по математике. — Мн., 1973.
- Шестопалов С.А.* Экзаменационные работы в 11 классе. — М., 2003.

## Зміст

Передмова .....	3
<b>Розділ 1. Задачі на відсотки.....</b>	<b>5</b>
1. Обчислення відсотків даного числа. Складні відсотки .....	5
2. Знаходження невідомого числа за його заданими відсотками .....	16
3. Відсоткове відношення двох чисел .....	19
4. Задачі на відсотки, пропорції, пропорційне ділення .....	22
5. Різні задачі.....	26
Задачі для самостійного розв'язування.....	36
<b>Розділ 2. Задачі на розчини, суміші, сплави .....</b>	<b>39</b>
1. Задачі на змішування .....	40
2. Задачі на розведення і насичення.....	51
3. Різні задачі.....	58
Задачі для самостійного розв'язування.....	66
<b>Розділ 3. Задачі на рух .....</b>	<b>69</b>
1. Найпростіші задачі на обчислення компонентів руху .....	69
2. Задачі на спільний рух двох і більше тіл.....	80
3. Рух по водному шляху .....	108
4. Рух по колу .....	117
5. Різні задачі.....	124
Задачі для самостійного розв'язування.....	138
<b>Розділ 4. Задачі на роботу .....</b>	<b>142</b>
1. Найпростіші задачі на обчислення компонентів роботи.....	142
2. Задачі на спільну роботу .....	148
3. Задачі на «басейни і труби» .....	161
4. Різні задачі.....	171
Задачі для самостійного розв'язування.....	188

<b>Розділ 5. Інші типи задач.....</b>	<b>191</b>
1. Задачі на числові залежності .....	191
2. Задачі, що зводяться до нерівностей .....	198
3. Задачі з цілочисельними невідомими .....	210
4. Задачі, що містять параметри .....	217
5. Задачі на відшукування найбільших і найменших значень .....	224
6. Задачі, в яких кількість невідомих перевищує кількість рівнянь системи .....	232
7. Різні задачі.....	237
Задачі для самостійного розв'язування.....	265
Використана література .....	269



*Навчальне видання*

КРАМОР Віталій Семенович

## **ЗАДАЧІ НА СКЛАДАННЯ РІВНЯНЬ І МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ**

Переклад з російської *Андрія Кравчука*

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Вікторія Дячун*

Художник обкладинки *Ростислав Крамар*

Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.05.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.

Умовн. друк. арк. 15,81. Умовн. фарбо-відб. 15,81.

[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців

ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48

E-mail: [publishing@budny.te.ua](mailto:publishing@budny.te.ua), [office@bohdan-books.com](mailto:office@bohdan-books.com)

[www.bohdan-books.com](http://www.bohdan-books.com)

ISBN 978-966-10-2604-8



9 789661 026048