БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Д.Т. Белешко

КОЛО І КРУГ:
готуємося до екзамену

Навчальний посібник

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
Б43

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Рецензенти:
Джунь Й.В. — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного моделювання Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. академіка С. Дем'янчука, дійсний член Міжнародної педагогічної академії
Власюк А.П. — доктор технічних наук, професор, декан факультету прикладної математики та комп'ютерно-інтегрованих систем НУ ВГП
Бомба А.Я. — доктор технічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ
Пекарська Л.В. — завідувач кабінету математики Рівненського ОІППО

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її викладання
Рівненського державного гуманітарного університету
(протокол № 10 від 20 квітня 2011 р.)

Белешко Д.Т.
Б43 Коло і круг: готуємося до екзамену: Навч. пос. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 48 с.

ISBN 978-966-10-2811-0

У посібнику розглянуто задачі з теми «Коло і круг» та систематизовано методи їхнього розв'язання з виділенням типових прикладів і прийомів, що дозволяє учням та абітурієнтам набути практичних навичок і сформувати певні алгоритми розв'язування подібних задач.

Для закріплення і глибшого засвоєння матеріалу наприкінці кожного параграфа подані вправи для самостійної роботи, а також відповіді до них.

Підсумовує викладене тест із 14 завдань.

Посібник розрахований на учнів загальноосвітніх шкіл та студентів математичних факультетів педагогічних університетів.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2811-0

Вступ

Звідки походить слово «коло»? Воно суто українське. Російські мовознавці спеціально досліджували його походження і дійшли такого висновку: «Колесо (в значении круг) — передача средствами русского языка украинского научного термина *коло*. Этот украинизм имел широкое хождение в средневековой научной литературе, в рукописях южных и юго-западных и преемственно использован Магницким и Поликарповым, выучениками Славяно-греко-латинской академии, где были очень сильны элементы южнорусской образованности» (Л.Л.Кутина. Формирование языка русской науки. — М. – Л.: Наука, 1964. — С. 47).

У російській науковій літературі початку XVIII ст. круг називали: *циркуль, обруч, округлость, окружие, колесо*; коло — *округ, окружение, циркумференция, периферия, периметр*. В «Арифметиці» Магницького читаємо: «*Через центр колесе линию проведи яже нарицается мередиана*» (Через центр кола відрізок проведи, який називається діаметром). В інших давніх книжках сучасне поняття радіус називалося словами: полупоперечник, полудіаметр, семидіаметр та ін.

Оскільки коло і пов'язаний із ним круг — одні з основних плоских фігур у геометрії і вони найпростіші для опису і побудови, то природно, що вони набули широкого застосування в техніці, будівництві, ужитковому мистецтві тощо. Задачі, пов'язані з використанням кола і круга, отже, досить різноманітні і потребують для свого розв'язання певних типових прийомів і методів, опис і систематизація яких і є якраз метою даного посібника.

Пропонований посібник складається з 9 розділів.

У першому параграфі розглянуті задачі, які пов'язані з колом і розв'язування яких зводиться до розв'язування трикутника. При цьому використовуються специфічні властивості кола.

У параграфі 2 подані метричні співвідношення в колі, які допомагають спростити розв'язування задач.

У параграфі 3 розглянуті типові прийоми застосування координатного методу до розв'язування задач даного типу.

У параграфі 4 розглянуті задачі на вписані і описані кола по відношенню до трикутника, нагадані деякі теоретичні відомості.

У параграфі 5 пропонуються задачі на доведення, оскільки за змістом і способами розв'язування такі задачі досить різноманітні, і вказати якийсь загальний метод тут неможливо, то ми обмежуємось декількома типовими прикладами.

У параграфі 6 розглянуто описані і вписані чотирикутники. Оскільки на відміну від трикутника, у загальному випадку, неможливо навколо них описати коло і в них вписати коло, то розглядаються теореми, які вказують умови, при яких це можна зробити.

У параграфі 7 розглянуті задачі на обчислення площ криволінійних фігур.

У параграфі 8 розглянуті задачі на побудову, пов'язані з колом, наведено декілька типових прикладів.

У дев'ятому параграфі розглянуто допоміжне коло. Розв'язування багатьох геометричних задач значно спрощується, якщо здогадатись провести вдало допоміжну побудову. Мета такої побудови — встановлення тісного зв'язку з даними в умові елементами і елементами, що потребують визначення. Допоміжними можуть бути: відрізки, кути, трикутники і т.ін. Дуже ефективним є проведення допоміжного кола. Розглянуто типові приклади.

Для закріплення і глибшого засвоєння параграфа подані вправи для самостійної роботи, а також відповіді до них. Підсумовує викладене тест із 14 завдань.

§ 1. Зведення задачі, пов'язаної з колом, до розв'язування трикутника

Велика кількість задач, пов'язаних з колом (або кругом), зводиться до задачі розв'язування трикутника. При цьому, звичайно, використовуються специфічні властивості кола. Зокрема:

1. Діаметр, що ділить хорду кола навпіл, є перпендикуляром до хорди.
2. Рівні хорди кола однаково віддалені від центра кола (і навпаки).
3. Якщо два кола дотикаються, то точка дотику лежить на лінії центрів кіл.
4. Якщо два кола перетинаються, то їхня спільна хорда перпендикулярна до лінії центрів і ділиться лінією центрів навпіл.
5. Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Приклад 1.1. Два кола з радіусами R і r дотикаються зовнішнім чином. Визначити довжину відрізка спільної зовнішньої дотичної до цих кіл.

Розв'язання. За умовою, $O_1A = R, O_1A \perp AB$, $O_2B = r, O_2B \perp AB$, $O_1O_2 = R + r$ (рис. 1).

Потрібно визначити AB. Проведемо $O_2K \parallel AB$, тоді $O_2K = AB$. З прямокутного трикутника O_1O_2K маємо:

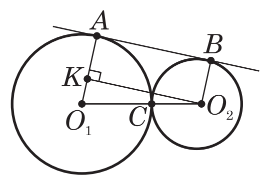

Рис. 1

$$O_2K = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Приклад 1.2. Два кола з радіусом r дотикаються. Крім того, кожне з них дотикається зовні третього кола з радіусом R у точках A і B відповідно. Обчислити радіус r, якщо $AB = 12$, $R = 8$.

Приклад 5.2. Навколо гострокутного трикутника ABC описано коло з центром O. Нехай AD — висота трикутника. Довести, що $\angle CAD = \angle BAO$.

Розв'язання. Продовжимо AO до перетину з колом у точці K, тоді AK — діаметр, а тому $\angle ABK = 90°$ (рис. 37). $\angle ACB = \angle AKB$ (вписані і спираються на одну і ту ж дугу). З прямокутних трикутників ADC і ABK знайдемо, що $\angle CAD = 90° - \angle ACB$, $\angle BAO = 90° - \angle AKB$. Звідси і випливає, що $\angle CAD = \angle BAO$.

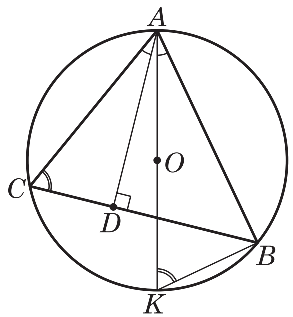

Рис. 37

Приклад 5.3. Через точку A кола з центром O проведено хорду AB, а через точку B — дотичну. Діаметр, перпендикулярний до радіуса OA, перетинає дотичну і хорду (або її продовження) відповідно в точках C і D. Довести, що ΔBCD — рівнобедрений.

Розв'язання. $\angle CBD = \angle MBA = 90° - \angle ABO$, $\angle BDC = \angle BDO = 90° - \angle DAO = 90° - \angle ABO$ (рис. 38). Отже, $\angle CDB = \angle BDC$, тобто ΔBDC — рівнобедрений.

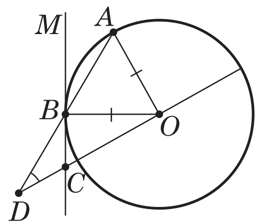

Рис. 38

Приклад 5.4. Нехай S — площа трикутника ABC, Q — площа трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного в ΔABC кола (рис. 39). Довести, що $\dfrac{Q}{S} = \dfrac{r}{2R}$, де R і r — відповідно радіуси описаного і вписаного в ΔABC кіл.

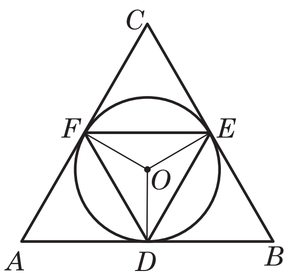

Рис. 39

Розв'язання.

$$Q = S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2}r^2 \sin\angle DOE + \frac{1}{2}r^2 \sin\angle EOF +$$

$$+\frac{1}{2}r^2 \sin\angle FOD = \frac{1}{2}r^2(\sin(180° - B) + \sin(180° - C) +$$

$$+\sin(180° - A)) = \frac{1}{2}r^2\left(\sin A + \sin B + \sin C\right).$$

Але, за теоремою синусів, $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = 2R$, звідки $\sin A = \dfrac{BC}{2R}$, $\sin B = \dfrac{AC}{2R}$, $\sin C = \dfrac{AB}{2R}$ (рис. 39).

Тому $Q = \dfrac{1}{2}r^2 \dfrac{BC + AC + AB}{2R} = \dfrac{r^2 \cdot 2p}{4R} = \dfrac{r^2 \cdot p}{2R} = \dfrac{r \cdot pr}{2R} = \dfrac{rS}{2R}$.

Отже, $Q = \dfrac{rS}{2R}$, звідки $\dfrac{Q}{S} = \dfrac{r}{2R}$.

Приклад 5.5. Центр кола O сполучений з точкою C, що лежить на даній хорді AB. Довести, що $OC^2 + AC \cdot BC = R^2$, де R — радіус кола.

Розв'язання. Проведемо відрізок OC до перетину з колом у точках D, E (рис. 40). Одержимо діаметр DE. За властивістю хорд (теорема 1, §2) маємо: $AC \cdot CB = DC \cdot CE$. Але $DC = OD - OC = R - OC$, $CE = OC + OE = R + OC$.

Отже, $AC \cdot CB = \left(R - OC\right)\left(R + OC\right) = R^2 - OC^2$.

Звідси $OC^2 + AC \cdot CB = R^2$, що і потрібно було довести.

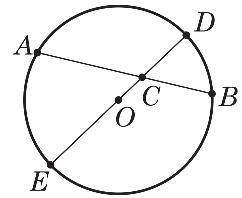

Рис. 40

Приклад 5.6. У квадрат вписане коло. Довести, що сума квадратів відстаней від точки кола до вершин квадрата не залежить від вибору точки на колі. Знайти цю суму.

Розв'язання. Застосуємо координатний метод. Вибір системи координат зрозумілий з рисунка. Нехай сторона квадрата $2a$, $M(x; y)$ — довільна (біжуча) точка кола, тоді рівняння кола має вигляд: $x^2 + y^2 = a^2$, а координати вершин такі: $A\left(-a; -a\right)$, $B\left(a; -a\right)$, $C\left(a; a\right)$, $D\left(-a; a\right)$ (рис. 41).

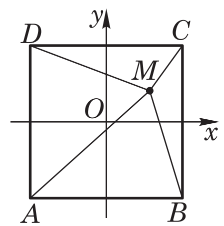

Рис. 41

Підрахуємо квадрати відстаней від точки M до вершин квадрата: $MA^2 = \left(x + a\right)^2 + \left(y + a\right)^2$, $MB^2 = \left(x - a\right)^2 + \left(y + a\right)^2$, $MC^2 = \left(x - a\right)^2 + \left(y - a\right)^2$, $MD^2 = \left(x + a\right)^2 + \left(y - a\right)^2$. Шукана сума дорівнює $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4\left(x^2 + y^2 + 2a^2\right) = 12a^2 = 3 \cdot AB^2$. Як бачимо, вона справді не залежить від x, y, тобто від вибору точки M.

Вправи

1. Два кола зовнішньо дотикаються в точці A. До них проведено спільно дотичну BC (B і C — точки дотику). Довести, що кут BAC — прямий.

2. Нехай AB — діаметр кола, C і D — довільні точки на колі, а E, F — точки перетину прямих AC і BD та AD і BC відповідно. Довести, що прямі AB і EF перпендикулярні.

3. Через кінці діаметра AB кола проведені хорди AC і BD, які перетинаються в точці P. Довести, що $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$.

4. Нехай h_a, h_b, h_c — висоти трикутника, r — радіус вписаного кола. Довести, що $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

5. Довести, що в будь-якому колі сума квадратів відрізків перпендикулярних хорд, що перетинаються, дорівнює квадрату діаметра.

6. Нехай у прямокутному трикутнику з катетами a, b і гіпотенузою c радіус вписаного кола дорівнює r. Довести, що $r = \frac{a+b-c}{2}$.

§6. Описані і вписані чотирикутники

Якщо дано довільний чотирикутник $ABCD$, то, на відміну від трикутника, в загальному випадку неможливо навколо чотирикутника описати коло і в нього вписати коло. Наступні дві теореми вказують умови, при яких це можна зробити.

Теорема 1. Навколо опуклого чотирикутника $ABCD$ тоді і тільки тоді можна описати коло, якщо суми протилежних кутів цього чотирикутника дорівнюють по 180°, тобто $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$. При цьому, якщо O – центр описаного кола, то $OA = OB = OC = OD = R$ (R — радіус описаного кола), а перпендикуляри OE, OF, OK, OM до сторін чотирикутника є серединними перпендикулярами цих сторін (рис. 42).

З теореми 1 безпосередньо випливає, що серед паралелограмів лише навколо прямокутників можна описати коло, а серед трапецій — лише навколо рівнобедрених трапецій.

Якщо потрібно обчислити радіус описаного навколо чотирикутника $ABCD$ кола (рис. 43), то часто корисно взяти до уваги, що це коло є одночасно описаним навколо трикутника ABD (або трикутників ABC, BCD і т.д.), тому задачу можна звести до задач, розглянутих у §4.

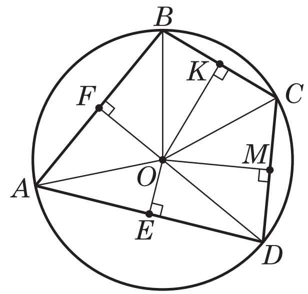

Рис. 42

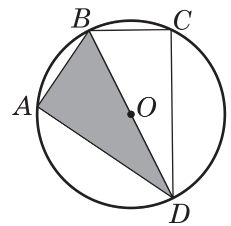

Рис. 43

Теорема 2. В опуклий чотирикутник $ABCD$ тоді і тільки тоді можна вписати коло, якщо суми протилежних сторін цього чомо: $\angle ABC = \angle AEC$ (як вписані кути, що спираються на одну або рівні дуги) і $\angle BCD = \angle ACE$. Тому $\Delta ACE \sim BCD$, звідки випливає $\dfrac{l+x}{b} = \dfrac{a}{l}$, $l^2 = ab - lx$. Але, якщо розглянути хорди AB і CE, що перетинаються в точці D, то одержимо $lx = mn$, отже $l^2 = ab - mn$, що і потрібно було довести.

Приклад 9.3. Дано довільний тупокутний трикутник ABC (з тупим кутом B). Точки B_1 і C_1 — основи висот цього трикутника, що проведені відповідно з вершин B і C, точка M — точка перетину прямих B_1C_1 і BC. Площа якого з трикутників більша: ΔB_1MC чи ΔBMC_1?

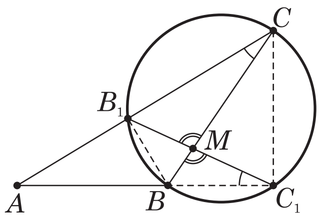

Рис. 64

Розв'язання. Навколо чотирикутника BB_1CC_1 можна описати коло (чому?) (рис. 64). Це і буде нашою допоміжною побудовою. Тепер розглянемо два трикутники ΔB_1MC і ΔBCM_1. У них $\angle B_1MC = \angle BMC_1$ і $\angle B_1CM = \angle B_1CB = \angle BC_1B_1 = \angle BC_1M$. Це означає, що $\Delta B_1MC \sim \Delta B_1MC_1$ і тому $\dfrac{S_{\Delta B_1MC}}{S_{\Delta BMC_1}} = \left(\dfrac{B_1C}{BC_1}\right)^2$. Але $B_1C > BC_1$ (чому?), отже,

$$S_{\Delta B_1MC} > S_{\Delta BMC_1}.$$

Приклад 9.4. На площині дано три паралельні прямі a, b, c (рис. 65). Побудувати рівносторонній трикутник, вершини якого лежать на цих прямих.

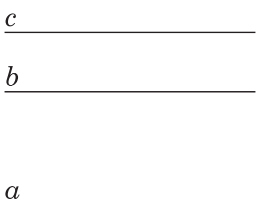

Рис. 65

Розв'язання. Проведемо аналіз. Нехай ABC — шуканий трикутник (рис. 66). Опишемо навколо нього коло. Воно перетне пряму c в точці C, а також ще в одній точці — D. Неважко зрозуміти, що $\angle ADC = \angle ABC = 60°$, $\angle ABD = \angle ACB = 60°$, $\angle CDB = 120°$. Ці міркування наводять на такий спосіб побудови. Оберемо на прямій c довільно точку D і побудуємо промені

DA і DB під кутами відповідно 60° і 120° до прямої c. Перший з променів визначить на прямій a точку A, другий — на прямій b — точку B. Відрізок AB — сторона шуканого трикутника. Подальші побудови — зрозумілі.

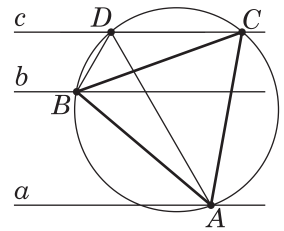

Рис. 66

Приклад 9.5. Точка E лежить на стороні AC рівностороннього трикутника ABC, а точка K є серединою AE. Пряма, що проведена через E перпендикулярно до AB, перетинає пряму, проведену через точку C, перпендикулярно до BC, в точці D. Визначити кути трикутника BKD.

Розв'язання. Розглянемо два чотирикутники. Перший з них — $BCDF$. Навколо нього можна описати коло (оскільки $\angle BCD + \angle BFD = 90° + 90° = 180°$), причому BD — діаметр цього кола (рис. 67). Другий чотирикутник — $BCKF$. Покажемо, що навколо нього теж можна описати коло.

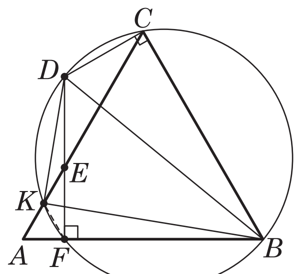

Рис. 67

Справді, в прямокутному трикутнику AFE відрізок FK — медіана (за умовою), а тому $FK = AK$. Це означає, що $\angle AFK = \angle FAK = 60°$, а тому $\angle BFK = 120°$. Тепер в чотирикутнику $BFKC$ сума протилежних кутів $\angle BFK + \angle BCK = 120° + 60° = 180°$. Це і доводить, що навколо чотирикутника $BCKF$ можна описати коло. Оскільки в чотирикутниках $BCDF$ і $BCKF$ три вершини співпадають, то і кола, описані навколо них, співпадають.

Отже, точки B, C, D, K, F лежать на одному колі з діаметром BD.

Тепер задачу легко розв'язати. У трикутнику BKD $\angle BKD = 90°$ (вписаний і опирається на діаметр), $\angle KDB = \angle KCB = 60°$, $\angle KBD = 90° - \angle KDB = 30°$.

Вправи

1. Довести, що в будь-якому гострокутному трикутнику основи висот утворюють новий трикутник, бісектриси якого є висотами початкового трикутника.

2. Довести, що пряма, яка з'єднує вершину прямого кута прямокутного трикутника з центром квадрата, побудованого зовні трикутника на його гіпотенузі, ділить прямий кут навпіл.

3. На сторонах AB, BC і CA довільного трикутника ABC зовні нього побудовані рівносторонні трикутники ABC_1, BCA_1 і CBA_1. Довести, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці і утворюють одна з одною кути по 60°.

4. Точка E лежить на продовженні сторони AC рівностороннього трикутника ABC, K — середина відрізка CE. Через точку A проведено пряму, перпендикулярну до AB, через точку E — пряму, перпендикулярну до BC. Вони перетинаються в точці D. Визначити кути трикутника BKD.

5. У трикутнику ABC $\angle BAC = 45°$, $\angle ACB = 75°$. На сторонах AB і BC обрані відповідно точки D і F так, що $\angle DCA = \angle FAC = 30°$. Обчислити кут CDF.

Тест

1. Кожна сторона першого трикутника більша будь-якої сторони другого. Чи правильно, що: 1) $R_1 > R_2$; 2) $r_1 > r_2$.
Відповідь. Обидва твердження неправильні.

2. Кути трикутника задовольняють умову $\angle A > \angle B > \angle C$. Яка з вершин трикутника знаходиться ближче від інших до центра вписаного кола?

3. Трапеція описана навколо кола. Чому дорівнює відношення її середньої лінії до периметра?
Відповідь. 1 : 4.

4. Бічна сторона описаної рівнобедреної трапеції дорівнює 12 см. Знайти периметр трапеції.
Відповідь. 48 см.

5. У трикутнику ABC $BC = a$, $AB = c$, а висота, опущена на сторону AC, дорівнює h. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Відповідь. $\dfrac{ac}{2h}$.

6. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює a. Обчислити сторону квадрата, що вписаний в це коло.

Відповідь. $a\sqrt{\dfrac{a}{3}}$.

7. У гострокутному трикутнику ABC сторона AB дорівнює радіусу описаного кола, O — центр вписаного в цей трикутник кола. Чому дорівнює кут AOB?
Відповідь. 105°.

8. При збільшенні у 4 рази радіуса кругової орбіти штучного супутника Землі період обертання збільшився у 8 разів. У скільки разів змінилася швидкість руху супутника на орбіті?
Відповідь. Зменшилась у 2 рази.

9. Навколо кола з центром O описана трапеція $ABCD$. Скільки з трикутників AOB, BOC, COD, DOA може бути прямокутних?
Відповідь. Два.

10. У трикутнику ABC кут A дорівнює 150°, O — центр вписаного кола. Чому дорівнює кут BOC?

11. Яке з тверджень правильне?
1. Якщо многокутник, вписаний в коло, має рівні сторони, то він — правильний;
2. Якщо многокутник, описаний навколо кола має рівні сторони, то він – правильний.
Відповідь. 1. Так. 2. Ні.

12. У чотирикутник, три послідовні сторони якого дорівнюють відповідно 2, 3 і 4, вписане коло з радіусом 1,2. Знайти площу цього чотирикутника.
Відповідь. 7,2 (кв. од.).

13. Два кола, що дотикаються між собою, з центрами O_1 і O_2 дотикаються внутрішнім чином кола з радіусом R із центром O. Знайти периметр трикутника O_1O_2O.
Відповідь. $2R$.

14. У крузі з радіусом 1 проведено хорду довжиною 1. Знайти площу меншої з двох частин, на які ця хорда поділила даний круг.
Відповідь. $S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (кв. од.).

Список літератури

для самостійної роботи по навчанню розв'язування планіметричних задач

1. Готман Е.Г., Скопец З.А. Задача одна — решения разные. — К.: Рад. шк., 1998. — 171 с.
2. Готман Е.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. — М.: Просвещение, 1979. — 128 с.
3. Гусев В.А., Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению математических задач. — М.: Просвещение, 1985. — 222 с.
4. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. — М.: Наука, 1978. — 224 с.
5. Нестеренко Ю.В., Олехник С.Н., Потапов М.К. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
6. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — Ч.1. — М.: Наука, 1986. — 272 с.
7. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — Ч.2. — М.: Наука, 1986. — 303 с.
8. Раухман А.С., Белешко Д.Т., Тадеєв П.О. Геометрія чотирикутника. Навч. пос. / За ред. В.О. Тадеєва. — Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2012. — 152 с.
9. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. М.И. Сканави. — М.: Высшая школа, 1988. — 431 с.
10. Сборник задач по элементарной математике / Антонов Н.П., Выготский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И. — М.: Наука, 1960. — 532 с.
11. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. / Под ред. В.И. Благодатных. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
12. Туманов С.И. Поиск решения задачи. — М.: Учпедгиз, 1959. — 279 с.
13. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии (планиметрии). М.: Наука, 1986. — 224 с.
14. Шарыгин И.Ф. Избранные задачи по геометрии конкурсных экзаменов в ВУЗы (1987–1990). — Львов, Квантор, 1991. — 96 с.

Зміст

Навчальне видання

БЕЛЕШКО Дмитро Тимофійович

КОЛО І КРУГ:
ГОТУЄМОСЬ ДО ЕКЗАМЕНУ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.10.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 2,85. Умовн. фарбо-відб. 2,85.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2811-0

9 789661 028110