Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатись перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп’ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку він проводився для учнів Донецької області, згодом вийшов за її межі, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України, і врешті «Золотий ключик» офіційно набув статусу Всеукраїнського у відповідності з наказом міністра освіти та науки України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може безкоштовно взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

На очний тур запрошують усіх учнів, які виявили в заочному турі кмітливість, винахідливість, працьовитість і, звичайно, знання математики. Призерів очного туру нагороджують дипломами і подарунками в день проведення конкурсу, а також їм надають пільги у навчанні в ВМК. В останні роки, поряд з основним очним туром, проходять регіональні очні тури на базі шкіл, учні яких брали активну участь у конкурсі.

Завдання як заочного, так і очного турів складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки. А щодо нагород, дипломів, заохочень, то в цьому конкурсі вони теж є.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. Значна частина завдань пов'язана з практичними ситуаціями.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість задач не є оригінальними, основні ідеї, покладені в їх основу, запозичені з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптовані для конкурсу.

Для багатьох учнів з участі в конкурсі розпочинається навчання математики в Східноукраїнській заочній математичній школі (СУЗМШ) — заочному відділенні ВМК. Програма навчання у СУЗМШ і ВМК для 6–9 класів містить теми, спрямовані не лише на підвищення математичної підготовки учнів, але і на їхній розвиток.

Велику допомогу в проведенні конкурсу надають вчителі шкіл. Завдяки їм учні отримують інформацію про конкурс, завдання заочного туру, і навіть доставку робіт часто забезпечують саме вчителі. Деякі вчителі на базі матеріалів конкурсу організовують позакласну роботу, яка сприяє підготовці до конкурсу. Звичайно, головний тягар в організації конкурсу лягає на плечі викладачів, співробітників математичного факультету Донецького національного університету, Центру математичної і комп'ютерної освіти МІОТ, студентів математичного факультету. Завдяки їм конкурс процвітає і виконує неабияку роль у формуванні в учнів цікавості до математики.

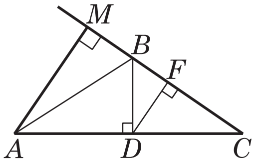
Матеріали конкурсу регулярно публікуються. У 2005 році оргкомітет Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» видав посібник з матеріалами «Золотого ключика» за попередні роки як приз для переможців конкурсу «Кенгуру».

У даному посібнику наведено завдання заочного й очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2006 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки вміщено в посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для учителів.

6. Перше твердження — площа трикутника менша від 1 – не є правильним. Наприклад, рівнобедрений трикутник з основою завдовжки 8 і з висотою, проведеною до цієї основи, завдовжки 0,3 має площу $\frac{8\cdot 0{,}3}{2} > 1$. Водночас довжина його висоти, проведеної до бічної сторони менша від 2 · 0,3 < 1, оскільки в довільному рівнобедреному трикутнику довжина висоти, проведеної до бічної сторони, менша від подвоєної висоти, проведеної до основи. Для доведення цього факту достатньо провести перпендикуляр із середини основи до бічної сторони і порівняти його довжину з довжинами обох висот (див. рис.).



Застосовуючи той самий приклад, можна дійти висновку, що довжина бічної сторони більша від 3, і довжина медіани, проведеної на бічну сторону, більша від 1 згідно зі співвідношенням між сторонами і діагоналями паралелограма. Отже, друге твердження є неправильним. Неправильним є і четверте твердження (достатньо скористатися наведеним прикладом).

Твердження *В* є правильним. Нехай h_a, h_b, h_c — висоти трикутника, проведені до сторін a, b, c. Тоді $ah_a = 2S = r(a + b + c)$, де S — площа трикутника, r — радіус вписаного кола. Звідси, $h_a = r\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$. Якщо додати такі рівності для h_a, h_b, h_c і скористатися нерівністю $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$, $x > 0$, $y > 0$, то отримаємо нерівність $9r \le h_a + h_b + h_c$.

За умовою, $h_a + h_b + h_c < 3$, тому $r < \frac{1}{3}$. ■

Відповідь: В. Радіус вписаного кола менше $\frac{1}{3}$.

7. Після перетворень рівняння набуває вигляду $\frac{x+1}{2x}=\frac{16}{31}$. ■

Відповідь: Б. Має один корінь: $x = 31$.

8. Після зменшення число a стало дорівнювати $0{,}36a$, а арифметичний корінь з нього — $0{,}6\sqrt{a}$. Тобто число $\sqrt{a}$ зменшилось на $0{,}4\sqrt{a}$ або на $\frac{0{,}4\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\cdot 100\ \% = 40\ \%$. ■

Відповідь: В. 40.

9. Перший доданок ділиться на 3. Другий доданок 5^{13} при діленні на 3 дає ту саму остачу, що і 2^{13}, тобто 2. Третій доданок 13^{17} при діленні на 3 дає ту саму остачу, що і 1^{17}, тобто 1. Отже, дане число ділиться на 3. ■

Відповідь: А. 3.

10. Подамо дане рівняння у вигляді $(3x + 7y)^2 + (2x - 3)^2 = 0$. Отже, $x = 1{,}5$; $y = -\frac{9}{14}$. ■

11. Розглянемо квадратик розміром 2×2, в якому рівно одна одиниця. Якщо за допомогою цих операцій весь великий квадрат можна заповнити нулями, то і в цьому квадратику в усіх клітинках стоятимуть самі нулі. Але цього зробити неможливо, оскільки при заміні чисел у стовпці або рядку цього квадратика парність кількості нулів у ньому не змінюється. Спочатку нулів у виділеному квадраті три, тобто непарна кількість. При будь-якій допустимій операції кількість нулів не буде парною, тобто ніколи не буде дорівнювати чотирьом. ■

12. Пронумеруємо всі яблука. Першим зважуванням визначимо вагу яблук 1 і 2, другим — 3 і 4, ..., п'ятим — 9 і 10. Підсумувавши ці результати, отримаємо вагу перших 10 яблук. Знайдемо вагу трьох яблук, що залишилися. Шостим зважуванням визначимо вагу яблук 11 і 12, сьомим — 12 і 13, восьмим — 11 і 13. Таким чином, кожне з цих яблук побуває на терезах рівно 2 рази. Тому, щоб отримати їх сумарну вагу, треба додати результати зважувань і поділити суму на 2. ■

Зміст