БІБЛІОТЕЧКА ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ

Д.Т. Белешко

РОЗВ’ЯЗУЄМО ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Навчальний посібник

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

ББК 22.1я72
Б43

Серію «Бібліотечка фізико-математичної школи» засновано 2010 року

Рецензенти:

Джунь Й.В. — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного моделювання Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. академіка С. Дем'янчука, дійсний член Міжнародної педагогічної академії.

Власюк А.П. — доктор технічних наук, професор, декан факультету прикладної математики та комп'ютерно-інтегрованих систем НУ ВГП

Бомба А.Я. — доктор технічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри інформатики та прикладної математики РДГУ

Пекарська Л.В. — завідувач кабінету математики Рівненського ОІППО

Рекомендовано до друку кафедрою математики та методики її викладання Рівненського державного гуманітарного університету (протокол № 10 від 20 квітня 2011 р.)

Белешко Д.Т.

Б43 Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навч. пос. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 80 с.

ISBN 978-966-10-2558-4

У посібнику розглянуто ірраціональні рівняння та нерівності і систематизовано методи їхнього розв'язання з виділенням типових завдань і прийомів, що дозволяє учням та абітурієнтам набути практичних навичок і сформувати певні алгоритми розв'язування подібних задач.

Для закріплення і глибшого засвоєння матеріалу наприкінці кожного розділу подані вправи для самостійної роботи, а також відповіді до них.

Посібник розрахований на учнів загальноосвітніх шкіл та студентів математичних факультетів педагогічних університетів.

ББК 22.1я72

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2558-4

Передмова

Для успішної самореалізації особистості у сучасному житті необхідно мати базові знання з математики, а якщо зважати на те, що вибір майбутньої професії тісно пов'язаний з цією наукою, то в цьому випадку необхідні більш повне опанування понять, законів, теорій і використання інноваційних технологій у навчанні та організації дослідницької і проектної діяльності у сфері математики, які призводять до формування високого рівня практичних компетентностей учня, орієнтованих на розвиток його особистості.

Кожна людина після здобуття середньої освіти постає перед важливим вибором — вибором професії. Безперечним фактом є те, що необхідною умовою для вступу до вищих навчальних закладів є участь у зовнішньому незалежному оцінюванні (ЗНО), де більшість випускників складає тести з математики. Результати ЗНО свідчать, що на сьогоднішній день багато випускників допускають помилки при розв'язуванні рівнянь та нерівностей, в тому числі ірраціональних.

На сучасному етапі розвитку людства поняття «ірраціональність» витлумачується по-різному і має широке застосування. Можна стверджувати, що цей термін уперше був досліджений у філософському вченні, а саме — при вивченні мислення як прерогативи людського існування.

Ірраціональність у філософському вченні. У філософії з'ясовується можливість визначення змісту поняття «ірраціональне», однією з головних рис якого є прагнення до універсальності.

Ірраціоналізм (лат. *irrationalis* — несвідоме, нерозумне) — напрям у філософії, що проголошує верховенство почуттєвого начала і робить його основною характеристикою як самого світу, так і світосприйняття, визначаючи дійсність такою, що не може бути вираженою у логічних поняттях.

Ірраціональність у гуманітарному вченні. Значення поняття «ірраціональне» розглянуто у гуманітарному знанні, точніше — в психології, в якій під терміном «ірраціональна» розуміють настанову людини, якщо вона породжує її неадекватну поведінку в якомусь конкретному випадку.

Ірраціональність у мистецтві. Розчарування в силі розуму пізнати дійсність було однією з головних причин виникнення ірраціоналізму, що став основою культурного розвитку кінця XIX – початку XX ст. — так, наприклад, ірраціональні засади символізму, романтизму та неоромантизму особливо помітні в поезії, живописі, театральному мистецтві тощо.

Ірраціональність у математиці. Ірраціональні числа виникли в геометрії при вивченні довжин. Геометричне ірраціональне число виражає собою довжину відрізка, неспівмірного з відрізком одиничної довжини. За легендою, піфагорійці відкрили несумірність деяких геометричних величин, але оскільки це суперечило їхній філософії, цілком побудованій на натуральних числах, вони тримали це відкриття у найсуворішій таємниці і навіть покарали на смерть одного з членів свого братства, який (за різними джерелами) перший знайшов або розголосив цей факт.

Остаточного розвитку теорія ірраціональних чисел набула тільки в другій половині XIX ст. у працях німецьких математиків Дедекінда, Кантора і Вейєрштрасса, а П'єр Ферма (1601–1665) в середині XVII ст. запропонував загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь, зводячи їх до системи цілих алгебраїчних рівнянь.

Знання різних методів розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей, безперечно, неабияк допоможе учням легше і швидше розв'язувати рівняння та нерівності, також забезпечить можливість і вміння аналізувати використаний метод і сприятиме уникненню помилок при розв'язуванні.

Пропонований посібник якраз і спрямований на те, щоб допомогти вчителям математики з'ясувати теоретичні та практичні аспекти прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри. Пропонуємо різні методи розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей, які сприятимуть формуванню раціональних прийомів розумової праці учнів.

Розділ I

Перетворення ірраціональних виразів

Задачі на тотожні перетворення ірраціональних виразів досить часто зустрічаються на зовнішньому тестуванні, тому випускникам потрібно добре оволодіти цим матеріалом.

Розглянемо деякі аспекти, пов'язані з такими перетвореннями.

1.1. Використання формули $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$

Якщо записати $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}=1-\sqrt{2}$, то це — помилка.

Правильним буде запис $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}=\left|1-\sqrt{2}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-1$.

Аналогічно, $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\left|\sqrt{3}-5\right|+\left|1-\sqrt{3}\right|=5-\sqrt{3}+\sqrt{3}-$ $-1=4$; $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=|2a-5|=\begin{cases}2a-5, & \text{якщо } a\ge\frac{5}{2},\\ -2a+5, & \text{якщо } a<\frac{5}{2}.\end{cases}$

Розглянемо складніші приклади.

Приклад 1. Спростити вираз $A=\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}+\sqrt{x}$, якщо $0<x<2$.

Розділ III

Штучні методи розв'язування ірраціональних рівнянь

3.1. Уведення спряжених виразів

Розв'язування деяких типів ірраціональних рівнянь іноді можна значно спростити, скориставшись спряженими виразами (так називають, наприклад, два вирази типу $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}-\sqrt{b}$). Цей спосіб можна застосувати до рівнянь виду $\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1} \pm \sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2} = mx+n$, якщо дріб $\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1-\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)}{mx+n}$ є двочленом першого степеня.

Для полегшення сприймання почнемо з прикладу, в якому $m=0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4\,. \qquad (1)$$

Розв'язання. Щоб дістати рівняння простіше, ніж задане, знайдемо різницю тих радикалів, сума яких дана за умовою задачі, тобто обчислимо вираз

$$\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=A. \qquad (2)$$

Для цього перемножимо ліві та праві частини рівняння (1) і (2), тоді дістанемо:

$$\left(\sqrt{1+x+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{1-x+x^2}\right)^2=4A,$$

або $1+x+x^2-\left(1-x+x^2\right)=4A;\ \ 2x=4A;\ \ A=\dfrac{x}{2}.$

Отже,

$$\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=\frac{x}{2}. \qquad (3)$$

Маючи суму і різницю радикалів заданого рівняння, для знаходження коренів легко дістати простіші рівняння. Так, додаючи почленно рівняння (1) і (3), маємо $2\sqrt{1+x+x^2}=4+\dfrac{x}{2}$, звідки $4\left(1+x+x^2\right)=16+4x+\dfrac{x^2}{4}$, або $15x^2=48$, $x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Зробивши перевірку при $x_1=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, $x_2=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, переконуємось, що обидва корені задовольняють рівняння.

Відповідь. $x_1=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, $x_2=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Розглянемо окремий випадок.

Розв'язання ірраціональних рівнянь вигляду $\sqrt{ax^2+mx+c}+\sqrt{ax^2+nx+c}=bx.$

Розглянемо один із прикладів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8}=7.$

Розв'язання. Різниця підкореневих виразів

$$\left(5x^2-4x+8\right)-\left(5x^2+3x+8\right)=-7x.$$

Запишемо її у вигляді

$$(\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8})(\sqrt{5x^2-4x+8}-\sqrt{5x^2+3x+8})=-7x.$$

За умовою, $\sqrt{5x^2-4x+8}+\sqrt{5x^2+3x+8}=7.$

Тому $\sqrt{5x^2-4x+8}-\sqrt{5x^2+3x+8}=-x.$

Далі отримаємо: $2\sqrt{5x^2-4x+8}=7-x$. Звідки $4\left(5x^2-4x+8\right)=49-14x+x^2$.

Розв'язавши дане рівняння і виконавши перевірку, отримаємо два корені рівняння, а саме: $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{17}{19}$.

Відповідь. $x_1=1$, $x_2=-\dfrac{17}{19}$.

Зауважимо, що розв'язуючи дану нерівність цим методом, ми одночасно розв'язали рівняння $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$ ($x_1=27$; $x_2=-\dfrac{1}{8}$) і нерівність $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}<3$ ($x\in\left(-\dfrac{1}{8},\ 27\right)$). У цьому полягає особливість методу інтервалів.

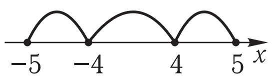
Метод інтервалів часто називають *загальним методом* розв'язування нерівностей. Справа в тому, що цим методом можна розв'язувати не тільки ірраціональні нерівності, але і будь-які інші нерівності (раціональні, показникові, логарифмічні тощо).

Приклад 11. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases}\sqrt{4x-7}<x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4.\end{cases}$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку кожну з нерівностей системи окремо, а потім знайдемо переріз одержаних проміжків.

1. $\sqrt{4x-7}<x$. ОДЗ: $x\in\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$. Рівняння $\sqrt{4x-7}=x$ зводимо до рівняння $x^2-4x+7=0$, яке не має розв'язків. Тому розглянемо проміжок $\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$. Контрольна точка $x=\dfrac{7}{4}$. Маємо: $\sqrt{4\cdot\dfrac{7}{4}-7}=0<\dfrac{7}{4}$ — задовольняє нерівність. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $x\in\left[\dfrac{7}{4},+\infty\right)$.

2. $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}>4$. ОДЗ: $x\in[-5;\ 5]$. Рівняння $\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}=4$ має корені $x_1=-4$; $x_2=4$. Вони розбивають ОДЗ на три проміжки: $[-5; -4)$, $(-4; 4)$, $(4; 5]$.



Перевірка за допомогою контрольних точок показує, що розв'язком нерівності є проміжок $x\in(-4;\ 4)$.

Тепер знаходимо $\left[\dfrac{7}{4};+\infty\right)\cap(-4;\ 4)=\left(\dfrac{7}{4};\ 4\right]$.

Відповідь. $x\in\left(\dfrac{7}{4};\ 4\right]$.

Вправи для самостійної роботи

Розв'язати нерівності:

9. $\sqrt{x}-\sqrt{6x+1}<\sqrt{2x+1}$.

10. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}<0$.

11. $\sqrt[3]{x-2}>\sqrt[3]{x-1}-1$.

12. $x-1>2\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{4}}$.

Розв'язати систему нерівностей:

13. $\begin{cases}\sqrt{4x-x^2}<4-x\\ \sqrt{x+2}>\sqrt{8-x^2}\end{cases}$.

Відповіді до вправ для самостійної роботи розділу IV

3. $x\in[-4;\ 1)$. **4.** $x\in(-4;\ 5)$. **5.** $x\in[2,5;\ 6)$. **6.** $\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right)$. **7.** $(-\infty;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

8. $\left[1;\ \dfrac{46}{19}\right)$. **9.** $(0;\ +\infty)$. **10.** $(-\infty;\ 2)$. **11.** $(-\infty;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$. **12.** $\left(2;\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

13. $(2;\ 3)$.

Список використаної літератури

1. Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10–11 кл. середн. шк. А.М.Колмогоров, О.М. Абрамов, Ю.П. Дудніцин та ін. За ред. А.М. Колмогорова. — К.: Освіта, 1992. — 350 с.
2. Башмаков М.И. Алгебра и начало анализа: Учебн. для 10–11 кл. средн. шк. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1992. — 350 с.
3. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібн. — К., Вища школа, 1989. — 367 с.
4. Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі. — К.: Рад. шк., 1954. — 484 с.
5. Бурда М.І., Дубинчук О.С., Мальований Ю.І. Математика: Підручник для 10–11 кл. закл. освіти гуманіт. профілю. - К.: Освіта, 2001. — 224 с.
6. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач. — К.: Рад. шк., 1991. — 128 с.
7. Суворова С.Б., Леонтьева М.Р. Упражнения в обучении алгебре. — М.: Просвещение, 1986. — 128 с.
8. Шкіль М.І., Слепкань З.І., Дубинчук О.С. Алгебра і початки аналізу: Підручн. для 11 кл. загальноосвітн. навч. закл. — К.: Зодіак — Еко, 2002. — 384 с.

Зміст

Навчальне видання

БЕЛЕШКО Дмитро Тимофійович

РОЗВ'ЯЗУЄМО ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Ростислав Крамар*
Комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 6.04.2012. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 4,65. Умовн. фарбо-відб. 4,65.
[В. 1].

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК №370 від 21.03.2001 р.

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352) 52-19-66; 52-06-07; 52-05-48
E-mail: publishing@budny.te.ua, office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com

ISBN 978-966-10-2558-4

9 789661 025584