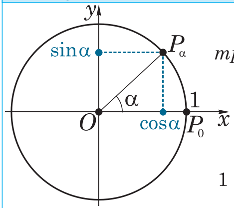
Основні формули тригонометрії (1)

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу



$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ — *основна тригонометрична тотожність.*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Числові функції

Функція — це відповідність між змінними x та y, при якій *кожному* значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y.

$y = f(x)$ — функція;

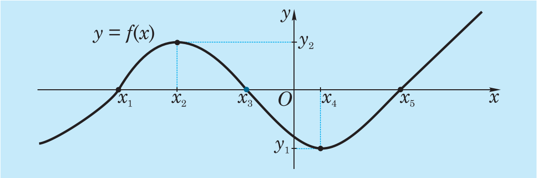
x — незалежна змінна, *аргумент*;

y — залежна змінна, *функція*.

Область визначення функції ($D(y)$) — це множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент).

Область значень функції ($E(y)$) — це множина всіх значень, яких набуває залежна змінна (функція).

Функція $y = f(x)$ задана графічно.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$;

x_1, x_3, x_5 — нулі функції;

$x_{max} = x_2$, $x_{min} = x_4$ — точки екстремуму;

$y_{max} = y_2$, $y_{min} = y_1$ — екстремальні значення.

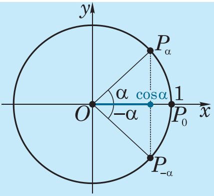
Проміжки монотонності:

$(-\infty; x_2]$, $[x_4; +\infty)$ — проміжки зростання;

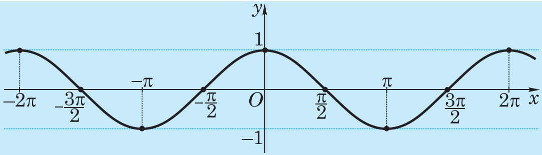
$[x_2; x_4]$ — проміжок спадання.

10

Властивості та графік функції $y = \cos x$



Косинус числа α — це ***абсциса*** точки P_α одиничного кола, в яку переходить початкова точка P_0 при повороті навколо центра кола на кут α рад.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$ — область визначення.

$E(y) = [-1; 1]$ — область значень.

$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$, $n \in \mathbb{Z}$ — функція періодична.

$\cos(-x) = \cos x$ — функція парна.

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — нулі функції.

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких значення функції додатні.

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких значення функції від'ємні.

$x_{max} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — точки максимуму; $y_{max} = 1$.

$x_{min} = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — точки мінімуму; $y_{min} = -1$.

$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких функція зростає.

$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ — проміжки, на яких функція спадає.

26 Основні теореми про границі

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя єдина.

Теорема 2. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі, то сума і різниця цих функцій також мають границі у цій точці, до того ж:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

▲ $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 4x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 + \lim\limits_{x \to -1} 4x = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -3;$

$\lim\limits_{x \to 2} (x - 3^x) = \lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 3^x = 2 - 3^2 = -7.$ ▼

Теорема 3. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі, то добуток цих функцій також має границю у цій точці, до того ж:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

▲ $\lim\limits_{x \to -5} ((3x+4) \cdot (x^2 - 7)) = \lim\limits_{x \to -5} (3x+4) \cdot \lim\limits_{x \to -5} (x^2 - 7) =$
$= (3 \cdot (-5) + 4) \cdot ((-5)^2 - 7) = -11 \cdot 18 = -198.$ ▼

Теорема 4. Якщо функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$ у точці x_0 мають границі та $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то частка цих функцій також має границю у точці x_0, до того ж:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

▲ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{8x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2 - x + 2)}{x(8+x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x + 2}{8+x} =$

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - x + 2)}{\lim\limits_{x \to 0} (8+x)} = \dfrac{0^2 - 0 + 2}{8+0} = \dfrac{1}{4}.$ ▼