Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатись перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп’ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку він проводився для учнів Донецької області, згодом вийшов за її межі, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України, і врешті «Золотий ключик» офіційно набув статусу Всеукраїнського у відповідності з наказом міністра освіти та науки України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може безкоштовно взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

На очний тур запрошують усіх учнів, які виявили в заочному турі кмітливість, винахідливість, працьовитість і, звичайно, знання математики. Призерів очного туру нагороджують дипломами і подарунками в день проведення конкурсу, а також їм надають пільги у навчанні в ВМК. В останні роки, поряд з основним очним туром, проходять регіональні очні тури на базі шкіл, учні яких брали активну участь у конкурсі.

Завдання як заочного, так і очного турів складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки. А щодо нагород, дипломів, заохочень, то в цьому конкурсі вони теж є.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. Значна частина завдань пов'язана з практичними ситуаціями.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість задач не є оригінальними, основні ідеї, покладені в їх основу, запозичені з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптовані для конкурсу.

Для багатьох учнів з участі в конкурсі розпочинається навчання математики в Східноукраїнській заочній математичній школі (СУЗМШ) — заочному відділенні ВМК. Програма навчання у СУЗМШ і ВМК для 6–9 класів містить теми, спрямовані не лише на підвищення математичної підготовки учнів, але і на їхній розвиток.

Велику допомогу в проведенні конкурсу надають вчителі шкіл. Завдяки їм учні отримують інформацію про конкурс, завдання заочного туру, і навіть доставку робіт часто забезпечують саме вчителі. Деякі вчителі на базі матеріалів конкурсу організовують позакласну роботу, яка сприяє підготовці до конкурсу. Звичайно, головний тягар в організації конкурсу лягає на плечі викладачів, співробітників математичного факультету Донецького національного університету, Центру математичної і комп'ютерної освіти МІОТ, студентів математичного факультету. Завдяки їм конкурс процвітає і виконує неабияку роль у формуванні в учнів цікавості до математики.

Матеріали конкурсу регулярно публікуються. У 2005 році оргкомітет Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» видав посібник з матеріалами «Золотого ключика» за попередні роки як приз для переможців конкурсу «Кенгуру».

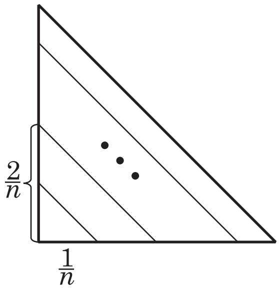
У даному посібнику наведено завдання заочного і очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2008 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006 і 2007 роки надруковано відповідно у першому, другому і третьому випусках серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для учителів.

2. Оскільки $\dfrac{2n^3-6n^2+6n+3}{n-1}=\dfrac{2(n-1)^3}{n-1}+\dfrac{3}{n-1}=2n^2-4n+2+\dfrac{3}{n-1}$ і перший доданок є цілим числом при будь-якому цілому значенні n, то сума набуває цілого значення тоді і тільки тоді, коли цілого значення набуває другий доданок. А це буде, якщо n дорівнюватиме –2; 0; 2; 4. ■

Відповідь. В. 4.



3. Побудовані відрізки є гіпотенузами прямокутних рівнобедрених трикутників з катетами $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}$. Шукана сума дорівнює $S=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\ldots+\dfrac{n-1}{n}\right)$. Оскільки 1 + 2 + ... + $+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, то $S=\dfrac{\sqrt{2}}{n}\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$. ■

Відповідь. Б. $\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$.

4. Випишемо всі цифри за зростанням. Цифра 0 не може бути використана в записі чисел, що задовольняють умову. Маємо 9 цифр. Щоб отримати семицифрове натуральне число, цифри якого розташовані за зростанням, достатньо викреслити будь-які дві цифри. Підрахунок кількості способів вилучення двох цифр подано в розв'язанні задачі 4 для 8-го класу на с. 67. За цим способом маємо 36 варіантів. ■

Відповідь. Г. 36.

5. Легко побачити, що шість розпилів дають потрібний результат. Але меншою кількістю розпилів цього результату не можна досягти, бо центральний куб має 6 граней, а кожна грань потребує окремого розпилу.■

Відповідь: Б. 6.

6. Перевірка будь-якої пари вимикачів на можливість включення ними лампи може бути реалізована переключенням по одному разу всіх підряд вимикачів, і в тому самому порядку повернення їх у початковий стан (усього $2n-1$ переключень). Менше ніж $2n-1$ переключень не гарантує включення лампи. Адже на кожну пару вимикачів має припадати проходження трьох станів, які реалізують трьома ввімкненнями, а всього не менш ніж $2\cdot(n-1)+1=2n-1$ переключень. ■

Відповідь: Г. $2n-1$.

7. Якщо позначити через x і y кількість частин, на які розрізали відповідно першу і другу половини куска дроту, то матимемо рівняння $11x = 13y$. Оскільки x і y — натуральні числа, то звідси випливає, що x ділиться на 13, а y — на 11. Із наведених у відповідях чисел лише число 48 можна подати у вигляді $13m + 11n$, де m і n — натуральні числа ($48 = 13 \cdot 2 + 11 \cdot 2$). ■

Відповідь. В. 48.

8. Усередині квадрата, сторони якого дорівнюють сумі довжин n клітинок, може міститись n горизонтальних і n вертикальних прямих сітки. Тому найбільша кількість вузлів усередині квадрата може дорівнювати n^2. ■

Відповідь. В. n^2.

9. Найбільшу площу має круг, вписаний в квадрат. Якщо сторона квадрата дорівнює $2a$, то радіус круга — a, а площа — πa^2, що становить $\frac{\pi a^2}{4a^2} \cdot 100\% \approx 78\%$ від площі квадрата. Тому прийнятною є відповідь 20 %. ■

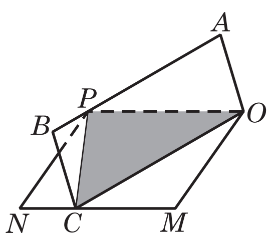
Відповідь. В. 20 %.

10. Трицифрових чисел — 900, з них умову задовольняють 300. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{300}{900} = \frac{1}{3}$. ■

Відповідь. Б. $\frac{1}{3}$.

11. Розв'язання задачі залежить від додаткових умов. Якщо відсоткові нарахування щорічно видавались клієнту, то через 5 років на рахунку буде a грн. Якщо відсоткові нарахування переводять на рахунок клієнта і спочатку було x грн., то через рік на рахунку буде $x + 0{,}1x = 1{,}1x$, через два роки — $1{,}1x + 0{,}1 \cdot 1{,}1x = 1{,}1^2x$, а через п'ять відповідно — $1{,}1^5x$. Маємо рівняння $1{,}1^5x = a$. Звідси $x = a \cdot 1{,}1^{-5}$ (грн.). ■

12. Нехай O — спільна вершина паралелограмів $OABC$ і $OPNM$, вершина P належить стороні AB, а вершина C — стороні NM (див. рис.). Площа трикутника OPC дорівнює половині площі паралелограма $OABC$, оскільки висота трикутника OPC, проведена з вершини P, є висотою і паралелограма. Так само встановлюємо, що площа трикутника OPC дорівнює



половині площі паралелограма $OPNM$. Тому площі даних паралелограмів рівні. ■

13. Нехай такий трикутник існує і a, b, c — його сторони, відповідні їм висоти 1, 2, 3. Тоді справджуються рівності $a = 2b = 3c = 2S$, де S — площа трикутника. Тоді $a = 2S$, $b = S$, $c = \frac{2}{3}S$. Оскільки $b + c < a$, то це суперечить нерівності трикутника. Отримана суперечність спростовує існування трикутника із заданими висотами. ■

Зміст