ГОТУЄМОСЯ ДО МАТЕМАТИЧНИХ ТУРНІРІВ

МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС 4–9 КЛАСИ

Посібник для підготовки до математичних турнірів

Випуск 4

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН

УДК 519.11
ББК 74.262 я72
М66

Серію «Готуємося до математичних турнірів» засновано 2009 року

М66 Математичний конкурс. 4–9 класи: Посібник для підготовки до математичних турнірів. Випуск 4 / [упоряд.: Павлов О.Л., Бродський Я.С.]. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. — 72 с. (Серія «Готуємося до математичних турнірів»).

ISBN 978-966-10-2273-6

У посібнику представлені тексти завдань конкурсу «Золотий ключик», що проводився Центром математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем при Донецькому національному університеті в 2008 році. У ньому також містяться розв'язки і відповіді до всіх завдань.

Посібник призначений для підготовки школярів 4–9 класів до математичних олімпіад, конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик», «Кенгуру». Може бути використаний вчителями шкіл, ліцеїв, гімназій для проведення математичних змагань у навчальних закладах.

УДК 519.11
ББК 74.262 я72

Навчальне видання

Готуємося до математичних турнірів

Упорядники:
ПАВЛОВ Олександр Леонідович,
БРОДСЬКИЙ Яків Соломонович

МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС. 4–9 КЛАСИ
Посібник для підготовки до математичних турнірів
Випуск 4

Підписано до друку 19.11.2011. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Century Schoolbook. Друк офсетний.
Умовн. друк. арк. 4,19. Умовн. фарбо-відб. 4,19.
[В. 1].

ISBN 978-966-10-0742-9 (серія)
ISBN 978-966-10-2273-6

Передмова

Хто з нас не любить змагатись? Відчути радість перемоги, спіймати захоплені погляди однокласників, почути стриману, але від цього ще більш бажану, похвалу дорослих, побачити радість і гордість в очах батьків — хіба не варто заради цього брати участь у змаганнях і намагатись перемогти! Будь-хто може знайти для себе сферу діяльності — спорт, музику, танці тощо, — де кожен у відповідності до своїх уподобань, можливостей, схильностей, здібностей може стати кращим, зможе перемогти.

Серед різноманітних змагань для школярів особливої уваги заслуговують конкурси і змагання з різних предметів. Насамперед, вони загальнодоступні, зацікавлюють учнів до навчальних дисциплін і відповідних розділів науки, природознавства, техніки, а це допомагає сформувати вибір майбутньої професії. І, що вкрай важливо, в таких конкурсах не буває тих, хто зазнає поразки. Адже, якщо навіть учасник змагань не став переможцем або призером, він переміг себе — свою інертність, лінощі, байдужість, отримав безцінний для становлення особистості досвід, набув нових знань.

Окрім традиційних шкільних олімпіад різного рівня, в останні роки стають популярними математичні конкурси, які відрізняються від олімпіад змістом та умовами проведення. Вони відкриті для всіх охочих, а незвичність завдань, їх цікавість робить ці конкурси численними.

Одним з таких нетрадиційних змагань є математичний конкурс «Золотий ключик». Його проводить, починаючи з 1997 року, Центр математичної і комп'ютерної освіти МІОТ разом з відкритим математичним коледжем (ВМК) Донецького національного університету. В ньому беруть участь учні 4–9 класів. Спочатку він проводився для учнів Донецької області, згодом вийшов за її межі, і його учасниками стали учні практично з усіх областей України, і врешті «Золотий ключик» офіційно набув статусу Всеукраїнського у відповідності з наказом міністра освіти та науки України.

Конкурс «Золотий ключик» є відкритим. Кожен учень 4–9 класів може безкоштовно взяти в ньому участь. Конкурс складається із заочного й очного турів. Заочний тур починається взимку і триває два місяці. Очний тур зазвичай проходить у березні і є одночасно репетицією до Міжнародного математичного конкурсу — «Кенгуру», що в Україні проводиться з 1997 року.

На очний тур запрошують усіх учнів, які виявили в заочному турі кмітливість, винахідливість, працьовитість і, звичайно, знання математики. Призерів очного туру нагороджують дипломами і подарунками в день проведення конкурсу, а також їм надають пільги у навчанні в ВМК. В останні роки, поряд з основним очним туром, проходять регіональні очні тури на базі шкіл, учні яких брали активну участь у конкурсі.

Завдання як заочного, так і очного турів складаються з двох частин. Розв'язок завдань першої частини зводиться до вибору правильної відповіді з декількох запропонованих. Серед наведених відповідей тільки одна є правильною. Друга частина завдань складається із «звичайних» задач, хоча більшість з них нестандартні. Їхній розв'язок оформляється за звичними для шкіл правилами, тобто з усіма необхідними поясненнями й обґрунтуваннями.

На думку багатьох учасників, конкурс приносить задоволення від розв'язання цікавих і нестандартних задач, підсилює інтерес до математики, підвищує рівень їхньої математичної підготовки. А щодо нагород, дипломів, заохочень, то в цьому конкурсі вони теж є.

Головною привабливістю конкурсу є його завдання. Вони різноманітні за складністю і змістом. Більшість з них не вимагають спеціальної підготовки, а розраховані на кмітливість та ініціативу при їх розв'язанні. Значна частина завдань пов'язана з практичними ситуаціями.

Упорядники посібника намагалися, щоб певна кількість завдань була приділена практичному застосуванню математики. Слід також зазначити, що значна кількість задач не є оригінальними, основні ідеї, покладені в їх основу, запозичені з таких періодичних видань, як «Квант», «Математика», «Математика в школі», «У світі математики», а також з іншої літератури «олімпіадної» тематики, й адаптовані для конкурсу.

Для багатьох учнів з участі в конкурсі розпочинається навчання математики в Східноукраїнській заочній математичній школі (СУЗМШ) — заочному відділенні ВМК. Програма навчання у СУЗМШ і ВМК для 6–9 класів містить теми, спрямовані не лише на підвищення математичної підготовки учнів, але і на їхній розвиток.

Велику допомогу в проведенні конкурсу надають вчителі шкіл. Завдяки їм учні отримують інформацію про конкурс, завдання заочного туру, і навіть доставку робіт часто забезпечують саме вчителі. Деякі вчителі на базі матеріалів конкурсу організовують позакласну роботу, яка сприяє підготовці до конкурсу. Звичайно, головний тягар в організації конкурсу лягає на плечі викладачів, співробітників математичного факультету Донецького національного університету, Центру математичної і комп'ютерної освіти МІОТ, студентів математичного факультету. Завдяки їм конкурс процвітає і виконує неабияку роль у формуванні в учнів цікавості до математики.

Матеріали конкурсу регулярно публікуються. У 2005 році оргкомітет Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру» видав посібник з матеріалами «Золотого ключика» за попередні роки як приз для переможців конкурсу «Кенгуру».

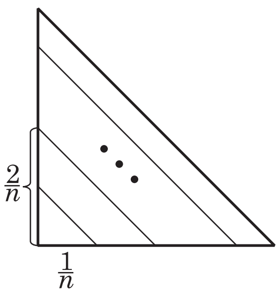
У даному посібнику наведено завдання заочного і очного турів конкурсу «Золотий ключик» за 2008 рік. Тексти завдань за 1997–2004 роки містяться у посібнику «Математичний конкурс «Золотий ключик». — Львів: Каменяр, 2004». Тексти завдань з розв'язками за 2005, 2006 і 2007 роки надруковано відповідно у першому, другому і третьому випусках серії «Готуємося до математичних турнірів».

Посібник призначено для учнів 4–9 класів, а також для вчителів математики. Школярі зможуть використати посібник для підготовки до математичних олімпіад і конкурсів, зокрема до конкурсів «Золотий ключик» і «Кенгуру». Вчителі математики зможуть скористатися посібником для проведення математичних змагань у навчальних закладах, для організації позакласної роботи з математики.

У посібнику наведено відповіді, вказівки та розв'язки задач. Упорядники сподіваються, що робота з посібником буде корисною і цікавою як для учнів, так і для учителів.

2. Оскільки $\dfrac{2n^3-6n^2+6n+3}{n-1}=\dfrac{2(n-1)^3}{n-1}+\dfrac{3}{n-1}=2n^2-4n+2+\dfrac{3}{n-1}$ і перший доданок є цілим числом при будь-якому цілому значенні n, то сума набуває цілого значення тоді і тільки тоді, коли цілого значення набуває другий доданок. А це буде, якщо n дорівнюватиме –2; 0; 2; 4. ■

Відповідь. В. 4.



3. Побудовані відрізки є гіпотенузами прямокутних рівнобедрених трикутників з катетами $\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{n-1}{n}$. Шукана сума дорівнює $S=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+...+\dfrac{n-1}{n}\right)$. Оскільки $1+2+...+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, то $S=\dfrac{\sqrt{2}}{n}\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$. ■

Відповідь. Б. $\dfrac{n-1}{\sqrt{2}}$.

4. Випишемо всі цифри за зростанням. Цифра 0 не може бути використана в записі чисел, що задовольняють умову. Маємо 9 цифр. Щоб отримати семицифрове натуральне число, цифри якого розташовані за зростанням, достатньо викреслити будь-які дві цифри. Підрахунок кількості способів вилучення двох цифр подано в розв'язанні задачі 4 для 8-го класу на с. 67. За цим способом маємо 36 варіантів. ■

Відповідь. Г. 36.

5. Легко побачити, що шість розпилів дають потрібний результат. Але меншою кількістю розпилів цього результату не можна досягти, бо центральний куб має 6 граней, а кожна грань потребує окремого розпилу. ■

Відповідь: Б. 6.

6. Перевірка будь-якої пари вимикачів на можливість включення ними лампи може бути реалізована переключенням по одному разу всіх підряд вимикачів, і в тому самому порядку повернення їх у початковий стан (усього $2n-1$ переключень). Менше ніж $2n-1$ переключень не гарантує включення лампи. Адже на кожну пару вимикачів має припадати проходження трьох станів, які реалізують трьома ввімкненнями, а всього не менш ніж $2\cdot(n-1)+1=2n-1$ переключень. ■

Відповідь: Г. $2n-1$.

7. Якщо позначити через x і y кількість частин, на які розрізали відповідно першу і другу половини куска дроту, то матимемо рівняння $11x = 13y$. Оскільки x і y — натуральні числа, то звідси випливає, що x ділиться на 13, а y — на 11. Із наведених у відповідях чисел лише число 48 можна подати у вигляді $13m + 11n$, де m і n — натуральні числа ($48 = 13\cdot 2 + 11\cdot 2$). ■

Відповідь. В. 48.

8. Усередині квадрата, сторони якого дорівнюють сумі довжин n клітинок, може міститись n горизонтальних і n вертикальних прямих сітки. Тому найбільша кількість вузлів усередині квадрата може дорівнювати n^2. ■

Відповідь. В. n^2.

9. Найбільшу площу має круг, вписаний в квадрат. Якщо сторона квадрата дорівнює $2a$, то радіус круга — a, а площа — πa^2, що становить $\dfrac{\pi a^2}{4a^2}\cdot 100\%\approx 78\%$ від площі квадрата. Тому прийнятною є відповідь 20 %. ■

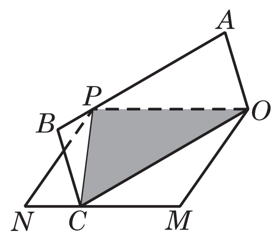
Відповідь. В. 20 %.

10. Трицифрових чисел — 900, з них умову задовольняють 300. Тому шукана ймовірність дорівнює $\dfrac{300}{900}=\dfrac{1}{3}$. ■

Відповідь. Б. $\dfrac{1}{3}$.

11. Розв'язання задачі залежить від додаткових умов. Якщо відсоткові нарахування щорічно видавались клієнту, то через 5 років на рахунку буде a грн. Якщо відсоткові нарахування переводять на рахунок клієнта і спочатку було x грн., то через рік на рахунку буде $x + 0{,}1x = 1{,}1x$, через два роки — $1{,}1x + 0{,}1\cdot 1{,}1x = 1{,}1^2x$, а через п'ять відповідно — $1{,}1^5x$. Маємо рівняння $1{,}1^5x = a$. Звідси $x = a\cdot 1{,}1^{-5}$ (грн.). ■

12. Нехай O — спільна вершина паралелограмів $OABC$ і $OPNM$, вершина P належить стороні AB, а вершина C — стороні NM (див. рис.). Площа трикутника OPC дорівнює половині площі паралелограма $OABC$, оскільки висота трикутника OPC, проведена з вершини P, є висотою і паралелограма. Так само встановлюємо, що площа трикутника OPC дорівнює



половині площі паралелограма $OPNM$. Тому площі даних паралелограмів рівні. ■

13. Нехай такий трикутник існує і a, b, c — його сторони, відповідні їм висоти 1, 2, 3. Тоді справджуються рівності $a = 2b = 3c = 2S$, де S — площа трикутника. Тоді $a = 2S$, $b = S$, $c = \frac{2}{3}S$. Оскільки $b + c < a$, то це суперечить нерівності трикутника. Отримана суперечність спростовує існування трикутника із заданими висотами. ■

Зміст