

**Натисніть тут, щоб
купити книгу на сайті
або замовляйте за телефоном:
(0352) 51-97-97, (067) 350-18-70,
(066) 727-17-62**

Передмова

Даний посібник написано для того, щоб учень школи зміг самостійно (можливо, без допомоги вчителя) підготуватися до успішного виступу на обласній чи Всеукраїнській математичній олімпіаді. Тому посібник орієнтується на задачі міських, обласних та національних олімпіад. При підборі задач я виходив із досвіду проведення факультативних занять з розв'язування олімпіадних завдань в Житомирському державному університеті імені Івана Франка, Житомирському міському ліцеї та Житомирському обласному педагогічному ліцеї. При цьому з метою забезпечення достатньої для факультативної роботи кількості задач використано багато задач, які пропонувались на Київських, Всеукраїнських та Соросівських олімпіадах. Також включено деякі задачі, складені автором. Усього в посібнику подано 264 задачі з повними розв'язаннями, більш як 800 задач з відповідями та вказівками та 100 задач для самостійного розв'язування (без відповідей та вказівок). Як ілюстративний матеріал, наведено приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків за 1997–2002 роки та за 2009 рік.

Засвоєння методів розв'язування олімпіадних задач вимагає від учня напруженої, активної та кропіткої самостійної роботи. Хочу нагадати вислів відомого математика Д. Пойа, який учень повинен пам'ятати завжди: *“Розв'язування задач — практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах чи грі на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад із кращих зразків та постійно практикуючись... Та пам'ятайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо входьте в воду, а якщо хочете навчитись розв'язувати задачі, то розв'яжуйте їх”*.

З метою економії часу при проведенні занять математичного гуртка краще, щоб теоретичний матеріал та задачі з розв'язаннями учні опрацювали вдома, а під час занять — розв'язувати ті задачі, що дані в посібнику без розв'язань. При підготовці до олімпіад роботу з даним посібником також варто поєднувати з роботою над рекомендованою літературою.

Зокрема, якісно готуватись до олімпіад рівня обласних та національних не можна без журналів “У світі математики” та “Математика у школі”. Ці журнали публікують повну інформацію про Міжнародні та Всеукраїнські математичні олімпіади, про математичні олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

інших вищих навчальних закладів України. Також у цих журналах публікуються статті про специфічні підходи при розв'язуванні олімпіадних задач (кожна з них може бути матеріалом для занять математичного гуртка), розповіді про новітні досягнення та застосування математики до розв'язання проблем економіки, фінансової математики, природознавства, соціальних наук тощо.

Друге видання книги після доопрацювання має відмінності порівняно з першим. Зокрема, його доповнено новим §12 «Раціональні та ірраціональні числа» та вилучено §2 «Доведення від супротивного», у зв'язку з чим змінена нумерація з §3–§12 на §2–§11. Оскільки основна частина книги зазнала суттєвого доопрацювання, то також було змінено номери деяких задач.

Після номера кожної задачі в дужках вказано класи, для яких можна пропонувати дану задачу (проте у зв'язку з відмінностями у навчальних програмах та зміною кількості класів навчання цю вказівку потрібно коригувати). Після номерів деяких задач додатково вказано, на якій олімпіаді пропонувалась ця задача і в якому році (при цьому номер класу вказано на час проведення олімпіади). Прийнято такі скорочення: ММО — Міжнародна математична олімпіада, УМО — Всеукраїнська математична олімпіада, ВТЮМ — Всеукраїнський турнір юних математиків, КМО — Київська математична олімпіада, ОМО — обласна математична олімпіада, СМО — Соросівська математична олімпіада, РМО — Всеросійська математична олімпіада. Багато задач наведено з повними розв'язаннями. При цьому в багатьох задачах акцентується увага не на самому розв'язку, а на тому, як до нього можна прийти. До деяких задач на доведення, розв'язання яких не потребує особливих ідей, вказівок не дано.

Бажаю всім читачам успіхів, творчого задоволення, оригінальних ідей та красивих розв'язків.

Кожна розв'язана мною задача ставала зразком, який служив потім для розв'язування інших задач.

Р. Декарт

Частина I

Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

Однак тоді отримуємо $f(x+1)f(x) = -1 - f(x+1) < 0$. Це суперечить отриманому вище висновку про те, що функція $f(x)$ зберігає знак. ■

✓ **Задача 19.15 (УМО-2002, 10).** Знайти всі пари багаточленів P, Q з дійсними коефіцієнтами ненульових степенів такі, що для всіх дійсних x, y справджується рівність

$$(P(x))^2 + (Q(y))^2 = P(y^2) + Q(x^2).$$

Розв'язання. Нехай $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, де $a_k \neq 0$, $b_n \neq 0$.

Підставивши $x = 0$, отримуємо рівність

$$a_0^2 + (Q(y))^2 = P(y^2) + b_0,$$

лівою частиною якої є багаточлен степеня $2n$, а правою частиною — багаточлен степеня $2k$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k = n$. Прирівнявши старші коефіцієнти, отримуємо $b_n^2 = a_k$.

Підставивши $y = 0$, отримуємо рівність

$$(P(x))^2 + b_0^2 = a_0 + Q(x^2).$$

За доведеним вище, ліва і права частини цієї рівності є багаточлени степеня $2k$. Прирівнявши старші коефіцієнти, отримуємо $a_k^2 = b_n$.

Звідси знаходимо $a_k = b_n = 1$.

Отже,

$$P(x) = x^k + P_1(x), \quad Q(x) = x^k + Q_1(x),$$

де $P_1(x) = a_p x^p + \dots + a_1 x + a_0$, $Q_1(x) = b_q x^q + \dots + b_1 x + b_0$, $p < k$, $q < k$, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, а задана в умові задачі рівність може бути записана у вигляді:

$$(P_1(x))^2 + 2x^k P_1(x) + (Q_1(y))^2 + 2y^k Q_1(y) = P_1(y^2) + Q_1(x^2). \quad (*)$$

Підставивши $x = 0$, отримуємо рівність, лівою частиною якої є багаточлен степеня $k + q$, а правою частиною — багаточлен степеня $2p$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k + q = 2p$.

Підставивши $y = 0$, отримуємо рівність, лівою частиною якої є багаточлен степеня $k + p$, а правою частиною — багаточлен степеня $2q$. Степені лівої і правої частин рівні, тобто $k + p = 2q$.

Звідси послідовно знаходимо $k = 2p - q = 2q - p$, $p = q$, $k = p = q$. Це суперечить тому, що $p < k$, $q < k$.

Тому рівність (*) може виконуватись лише у випадку $P_1(x) \equiv 0$, $Q_1(x) \equiv 0$.

Отже, $P(x) = Q(x) = x^k$, $k \in N$. ■

Задачі для самостійного розв'язування

⇒ **Задача 19.16 (10–11).** Розв'язати на множині дійсних чисел функціональні рівняння:

$$1) f(x+y) = f(x) + y, \quad x, y \in R;$$

$$2) f(x+y) - f(x-y) = 2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin y, \quad x, y \in R;$$

$$3) f(x+y) + 2f(x-y) = 3f(x) - y, \quad x, y \in R;$$

$$4) f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 2f\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad x \neq 0, x \neq 1;$$

$$5) xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \quad x, y \in R.$$

⇒ **Задача 19.17 (УМО-1974, 10).** Знайти усі функції f , які визначені на всій множині дійсних чисел і при будь-яких дійсних значеннях x і y задовольняють рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos y.$$

⇒ **Задача 19.18 (УМО-1982, 8).** Знайти усі багаточлени $f(x)$ такі, щоб рівність

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$$

виконувалась для всіх дійсних x і y .

⇒ **Задача 19.19 (УМО-1982, 10).** Функція $f(x)$, яка задана на відрізку $[0;1]$, для будь-яких $a, b \in [0;1]$ задовольняє нерівність

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b).$$

Відомо, що $f(0) = f(1) = 0$.

а) Довести, що рівняння $f(x) = 0$ має безліч розв'язків.

б) Навести приклад такої функції, яка б не дорівнювала тотожно нулю.

⇒ **Задача 19.20 (1 СМО-1994, 11).** Функція $f(x)$, яка визначена на множині невід'ємних дійсних чисел, набуває дійсних значень.

Відомо, що $f(0) = 0$ та функція $\frac{f(x)}{x}$ неспадна для $x > 0$. До-

21. Довести, що для будь-яких α, β, γ хоча б одне з чисел $\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma \cos \alpha$ не більше за $\frac{1}{2}$.
22. Знайти всі натуральні числа m і n , для яких виконується рівність
- $$\operatorname{arctg} \frac{2}{m} + \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}.$$
23. Знайти найбільше значення виразу $\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta$, якщо $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$.
24. Розв'язати рівняння $13 + 4 \cos 2x = 9 \cos x + 6 \sin 2x$.
25. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^3 + 3 = 4y(y+1)$.

Поради учаснику олімпіади

1. Уважно прочитайте умови задач і визначте порядок, в якому будете їх розв'язувати (краще починати з легших задач, які, як правило, розміщені напочатку).

2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не вибирайте найзручніший для себе, а зверніться за консультацією до членів журі.

3. Якщо неясно, чи правильне деяке твердження, спробуйте його довести або спростувати.

4. Не зациклюйтесь на одній задачі. Якщо немає ідеї розв'язання, то задачу краще (хоча б на деякий час) відкласти.

5. Розв'язавши задачу, зразу ж оформляйте розв'язання. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.

6. Кожен, навіть очевидний, крок розв'язання потрібно записувати. Громіздкі розв'язання краще записувати у вигляді кількох тверджень (лем).

7. Перед тим, як здати роботу, уважно перечитайте її “очима членів журі” — чи зможуть вони в ній розібратись?

Критерії оцінювання олімпіадних робіт

Ціль математичної олімпіади – виявити учнів, здатних нестандартно (і при цьому правильно) думати і застосовувати набуті в школі знання до розв’язування “нешкільних” задач. Тому часто при перевірці робіт описки та дрібні помилки прощаються. В останні роки традиційною є така система оцінок:

7 балів — задача розв’язана правильно;

6 балів — задача розв’язана, але є дрібні зауваження до розв’язання (наприклад, не розглянуто деякі прості часткові випадки);

5 балів — задача розв’язана в цілому, недоліки розв’язання легко усуваються;

3–4 бали — задача розв’язана “наполовину”, тобто хід розв’язання правильний, є значний прогрес у розв’язанні, але повне розв’язання додатково потребує інших істотних ідей;

1–2 бали — задача не розв’язана, але підхід до розв’язання правильний або задача розв’язана для найпростіших частинних випадків;

0 балів — розв’язання задачі неправильне та не містить ідей, за допомогою яких задача може бути розв’язана, або задача не розв’язувалась.

Як правило, журі олімпіади розробляє критерії оцінювання розв’язань та нарахування балів за кожною задачею окремо. Ці критерії можуть відрізнятися від наведених вище. При цьому часто за розв’язання простих (на думку журі) задач нараховуються лише такі оцінки: 7 балів, 6 балів, 1 бал, 0 балів.

Список літератури

Основна література

1. Аннікушин А.В., Арман А.Р., Білокопитов Є.О., Добасевич О.М., Клурман О.О., Крюкова Г.В., Ліпунов В.Г., Маліцький Ю.В., Мартюшова І.В., Мисок Д.П., Рубльов Б.В., Торба С.М., Усольцева О.С., Шепельська В.Д. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007-2009, 2008-2009, 2010. – Львів, “Камеярь”, 2010.
2. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – Москва, “Наука”, 1975.
3. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – Москва, “Наука”, 1988.
4. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л. Заочные математические олимпиады. – Москва, “Наука”, 1986.
5. Вишенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – Издательство при Киевском университете, Киев, 1984.
6. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. – Київ, “Либідь”, 1993.
7. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. – Київ, “Вища школа”, 1993.
8. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. – Москва, “Просвещение”, 1986.
9. Генкін С.А., Ітенберг І.В., Фомін Д.В. Ленінградські математичні гуртки. – Київ, “ТВіМС”, 1997.
10. Конет І.М., Паньков В.Г., Радченко В.М., Теплінський Ю.В. Обласні математичні олімпіади. – Кам’янець-Подільський, “Абетка”, 2005.
11. Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады. – Москва, “Наука”, 1987.
12. Кушнір І. А. Методи розв’язання задач з геометрії. – Київ, “Абрис”, 1994.

21. Ясінський В.А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад. – Харків, «Основа», 2006.

Науково-популярна література

1. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. – Москва, “Мир”, 1971.
2. Гарднер М. Крестики-нолики. – Москва, “Мир”, 1971.
3. Линдгрэн Г. Занимательные задачи на разрезание. – Москва, “Мир”, 1977.
4. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – Москва, “Наука”, 1976.
5. Пойа Д. Математическое открытие. – Москва, “Наука”, 1976.

Зміст

Передмова	3
------------------------	----------

Частина I

Ідеї та методи розв'язування нестандартних задач

§1.	Індукція і метод математичної індукції	7
§2.	Підрахунок двома способами	19
§3.	Відповідність	24
§4.	Комбінаторика	27
§5.	Інваріанти	40
§6.	Парність	47
§7.	Правило крайнього	52
§8.	Принцип Діріхле	56
§9.	Графи	65
§10.	Подільність та остачі, алгоритм Евкліда	76
§11.	Рівняння в цілих числах	89
§12.	Раціональні та ірраціональні числа	101
§13.	Методи доведення нерівностей	109
§14.	Середні величини. Нерівність Коші	122
§15.	Нестандартні рівняння та системи рівнянь	133
§16.	Застосування нерівностей при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь	145
§17.	Застосування властивостей функцій	154
§18.	Задачі з цілою та дробовою частинами числа.....	163
§19.	Функціональні рівняння	173
§20.	Розміщення фігур на площині, покриття, розрізання та розфарбування фігур	191
§21.	Ігрові задачі	201
§22.	Планіметричні задачі	210
§23.	Перетворення площини, задачі на побудову	225
§24.	Векторно-координатний метод	237
§25.	Геометричні нерівності та екстремуми.....	248
§26.	Стереометричні задачі	260
§27.	Послідовності	272
§28.	Границя послідовності і функції	284
§29.	Застосування похідної та інтеграла	295

§30.	Задачі з параметрами	311
§31.	Нерівність Єнсена	325
§32.	Числа із заданими властивостями	331

Частина II

Приклади завдань Всеукраїнських та обласних олімпіад юних математиків

37-а обласна олімпіада, 1997 р.	342
37-а Всеукраїнська олімпіада (1997 р., м. Одеса).....	344
38-а обласна олімпіада, 1998 р.	348
38-а Всеукраїнська олімпіада (1998 р., м. Миколаїв)	351
39-а обласна олімпіада, 1999 р.	355
39-а Всеукраїнська олімпіада (1999 р., м. Запоріжжя).....	357
40-а обласна олімпіада, 2000 р.	361
40-а Всеукраїнська олімпіада (2000 р., м. Суми).....	364
41-а обласна олімпіада, 2001 р.	366
41-а Всеукраїнська олімпіада (2001 р., м. Тернопіль)	369
42-а Всеукраїнська олімпіада (2002 р., м. Кам'янець-Поділь- ський)	372
39-а обласна олімпіада, 2009 р.	374
49-а Всеукраїнська олімпіада (2009 р., м. Рівне).....	376

Частина III

Задачі для самостійного розв'язування

8 клас	382
9 клас	384
10 клас	386
11 клас	388
Поради учаснику олімпіади.....	391
Критерії оцінювання олімпіадних робіт.....	392
Список літератури	393