Передмова до українського видання

Це видання — переклад книги «Математические завлекалки» Б.А. Кордемського (1907–1999 рр.), метра російської науково-популярної літератури, книги, яка, на жаль, виявилася останньою в його значному творчому доробку. А це — ціла низка різноманітних і захоплюючих книг, які, пробуджуючи цікавість до математики, сприяли вихованню математичного мислення, розвитку ініціативи та кмітливості у багатьох поколінь учнів.

У праці, в навчанні, у грі, у будь-якій творчій діяльності людині потрібні, за словами Кордемського, винахідливість, спритність, здогад, уміння міркувати, — усе те, що можна означити одним словом як кмітливість, або ж, рівноцінним, соковитим, — тямущість. Її ж, цю тямущість, можна виховати й розвинути систематичними і поступовими вправами, зокрема, розв'язуванням математичних задач як шкільного курсу, так і задач, що виникають з практики, пов'язаних із спостереженням довколишнього світу речей та явищ, — особливо ж розв'язуванням математичних головоломок, ребусів, задач з інтригуючим змістом. Можливо, в наш прагматичний час елементи «інтриги», «приваби», врешті, «заманювання» відіграють чи не найвирішальнішу роль.

Тепер ось маємо й україномовну версію математичних «заманинок» (до речі, теж своєрідний український «новотвір» — адже слово сконструйоване на основі «заманливого», тобто чогось привабливого, приємного тощо — тут і відлуння діалектної «заманки» — «принади»). У вітчизняному інформаційному просторі оприсутнюються персонажі книги: Жвавчик (в оригіналі «Шустрік») та Мимрик («Мямлік»). Перший — меткий, заповзятливий, спритний. І: розсудливий, дещо стриманий, — другий. В математиці обидва типи особистостей і, отже, підходів потрібні в однаковій мірі — бо, як правило, початкове емоційне сприйняття умови задачі (чи її «інтриги») повинно, врешті, урівноважитись вдумливим, спокійним аналізом усіх можливих розгалужень та варіантів розв'язання цієї задачі.

Дві стихії (знову ж таки, за висловом Кордемського) панують в царині математики — числа й фігури з їхнім нескінченним різноманіттям властивостей і взаємозв'язків. Задача — це майже завжди пошук, розкриття цих властивостей і співвідношень, а засоби її розв'язку — це інтуїція та здогад, ерудиція й володіння методами математики. Стихія чисел і фігур, притаманна математиці, панує, отже, на кожній сторінці кожної із книг цієї серії — починаючи від «усілякої всячини», проходячи через «галерею казок і фантазій», переживаючи «події та пригоди на стежинках математики», розкриваючи «маленькі таємниці чисел та фігур» і, врешті, «роблячи відкриття».

Особливої уваги заслуговує так звана «поетикоарифметика», розсипана по усьому тексту — це і вірші, поетичні уривки, епіграфи, заголовки тощо. На перший погляд, цей «калейдоскоп» може видатись строгому математику зайвим чи надто «переобтяженим поезією» — проте, заглибившись у цей поетичний світ чисел та фігур, мимоволі зачаровуєшся магією цієї стихії. Звичайно ж, адекватність перекладу вимагала досить доскіпливого підходу до поетичних текстів, написаних в різні епохи людської історії та й у досить відмінних стилях. Інколи це вимагало до «примітивного» версифікування знаходити такі ж адекватні «примітивності» або ж на уже зроблений переклад з інших мов російською в оригіналі «накладати» український переклад.

Загалом, певні удосконалення розв'язків задач (і це відображено у відповідних примітках), усунення деяких помилок та неточностей, а також проведена стилістична правка тексту, на нашу думку, тільки розширить коло зацікавлених українських читачів цієї захоплюючої книги «заманинок».

В.К. Дячун

Математика народжувалася одночасно з арифметики й геометрії.

О.Д. Алєксандров

(Але...)
Хвилювання — то властивість весни,
Бо завжди ми непокоїмось в ній,
То ж не будемо пихато-смішні,
*Що задачі всі розв'язані — ні...**

Л. Мартинов

Їх нескінченно багато — цих числових і геометричних відношень, які не впадають в око й, однак, достатньою мірою увібрали в себе і «жар холодних чисел», і красу геометричних абстракцій. Допитливий погляд «натураліста»-математика, звичайно, помічає їх.

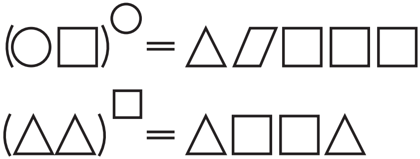
«... Приховувати я не стану...»

1. Що таємниця чисел 12 і — оберненого — 21 розкрита: квадрати цих чисел — 144 і 441 — також взаємно обернені числа. Чи не підберете ще хоча б одну пару чисел з такою ж властивістю?

2. Що, якщо квадратне число (n^2) закінчується на 25, наприклад, 625, то його третя цифра від кінця — неодмінно парна, але не 4 і не 8. Все-таки треба б це довести, зрозуміло, не прикладами.

3. Що фігурки двох ребусів

* Віршовані тексти перекладені В.К. Дячуном.



— мовби запитують вас:

а) який степінь двозначного числа має «хвостик» із трьох однакових цифр (перший ребус)?

б) Який степінь двозначного числа з однаковими цифрами є паліндромічним числом, тобто числом, рівним оберненому (другий ребус)?

4. Що «немає правила без винятків» іноді не тільки у людей, але й на множині цілих чисел і геометричних фігур.

Спробуйте, приміром, препарувати ціле число для подання у вигляді різниці квадратів — відразу виявиться й «правило», і «виняток»:

$1 = 1^2 - 0^2$	$5 = 3^2 - 2^2$	$9 = 5^2 - 4^2$
2	6	10
$3 = 2^2 - 1^2$	$7 = 4^2 - 3^2$	$11 = 6^2 - 5^2$
$4 = 2^2 - 0^2$	$8 = 3^2 - 1^2$	$12 = 4^2 - 2^2$
		....

Трохи пильної уваги — і виникає гіпотеза: будь-яке $n \in \mathrm{N}$, за винятком парних чисел виду $2(2n-1)$, можна подати у вигляді різниці квадратів двох натуральних чисел.

Те, що $2(2n-1) \neq x^2 - y^2$, $x, y \in \mathrm{N}$, легко доводиться «від супротивного». Нехай $2(2n-1) = 2km$, де k і m — непарні. Припустимо, що $2km = x^2 - y^2 =$ $= (x-y)(x+y)$.

Тоді

$$\begin{cases} x - y = 2k, \\ x + y = m, \end{cases} \Rightarrow x = k + \frac{m}{2} \Rightarrow m \text{ — парне. Протиріччя!}$$

Для всіх інших натуральних чисел, тобто парних виду $4n$ і всіх непарних, справедливі тотожності:

$4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$ та $2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2$.

Переконайтеся! Дещо таємне стало явним! Проте, читаючи кумедний афоризм Байрона:

«наука — це обмін одних незнань на інші»,

продовжимо спостереження за різницею квадратів натуральних чисел:

	$4^2 - 1^2 = 3 \cdot 5$	$7^2 - 4^2 = 3 \cdot 11$
$2^2 - 0^2 = 2 \cdot 2$	$5^2 - 2^2 = 3 \cdot 7$	$8^2 - 3^2 = 5 \cdot 11$
$3^2 - 0^2 = 3 \cdot 3$	$6^2 - 1^2 = 5 \cdot 7$	$9^2 - 2^2 = 7 \cdot 11$
		....

Зауважуємо: у правій частині рівності обидва співмножники — прості числа. Так пробилося джерельце ще однієї «аматорської» гіпотези:

для будь-якого натурального $x > 1$ можна підібрати натуральне y, таке, що $x^2 - y^2 = p_1 \cdot p_2$, де p_1, p_2 — прості числа.

Ще момент — і новою гранню повернеться ця гіпотеза. Нехай $x - y = p_1$ і $x + y = p_2$. Тоді $x = \frac{p_1 + p_2}{2}$, тобто

можливо, що будь-яке число $x > 1$, взяте на осі натуральних чисел, є центром симетрії хоча б однієї пари простих чисел.

Любов з першого погляду

В математиці це — моментальне прийняття правильного висновку при одному погляді на дану задачу.

Таке можливе, зрозуміло, як реалізація попередньо набутого багатства відомостей про числа й фігури.

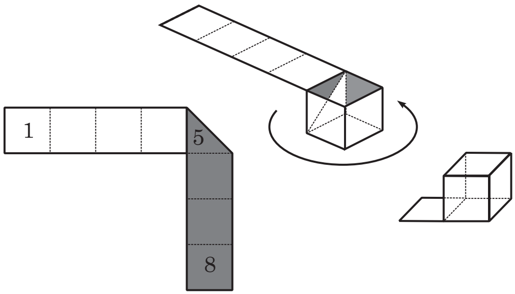
Випробуйте себе на «любов з першого погляду» до запропонованих далі задач: намагайтеся дати миттєві відповіді з наступним обґрунтуванням їхньої правильності.

1. Яке із чисел 1992, 40835, 6887, 5348, 783 є точним квадратом?

2. Яку цифру потрібно дописати зліва до числа 425 і до числа 845, щоб утворилися точні квадрати?

3. Не обчислюючи площ трикутників, сторони яких 5, 5, 6 і 5, 5, 8, визначте з першого погляду — чи рівновеликі вони, тобто чи рівні їхні площі.

Кубик зі смужки



З аркуша паперу (одна сторона — біла, інша — кольорова) виріжте прямокутну смужку, довжина якої у 8 разів більша від ширини. Поділіть смужку пунктирними лініями на 8 рівних квадратів і перегніть її по діагоналі п'ятого квадрата (див. мал. справа).

Далі, зберігаючи зроблений згин, робіть нові згини смужки по пунктирних лініях під прямим кутом і зімкніть усі квадрати, утворюючи форму кубика з ребром, що дорівнює ширині смужки. Усі 6 граней кубика зовні повинні бути кольоровими. У сформованого кубика перший і восьмий квадратики підклейте (клейкою стрічкою) — кубик не розвалиться.

Молодшим повинна сподобатися ця розвага.

Зміст