ВСТУПНЕ СЛОВО

Дорогий першокурснику! Молодий наш колего!

Ти вирішив пов'язати з математикою свою майбутню професійну діяльність, а, отже, й своє життя. Це прекрасний вибір, вітаємо Тебе!

Ця книга, сподіваємося, не тільки утвердить Тебе у правильності обраної спеціальності, а й розширить математичний кругозір, допоможе краще уявити собі професію математика або учителя математики, переконатися у її важливості й соціальній значимості, підготуватися до професійної діяльності в умовах високотехнологічного суспільства так, щоб майбутня робота приносила користь людям і внутрішню радість та задоволення від її виконання.

Математика — одна із найдавніших наук, яка сягає своїм корінням в доісторичні часи. Разом із тим, це наука вічно молода, яка живиться і розвивається від постійного притоку нових задач, що пропонує їй саме життя. Сьогодні особливо відчутне проникнення математики в найрізноманітніші сфери науки і практичної діяльності людини, причому не лише природничо-технічні та економічні (фізика, енергетика, електроніка, біологія, екологія, медицина, економіка та ін.), а й гуманітарні (філософія, лінгвістика, історія, соціологія, теорія ігор та ін.). Сфера дії сучасної математики воістину неосяжна. Математика стає універсальною мовою й універсальним інструментом науки і практики загалом.

Щоб досконало оволодіти цією мовою і цим інструментом, знадобиться багато зусиль, терпіння, ентузіазму і щоденної копіткої праці. Але це не буде сізіфова праця. Кожен, хто не шкодуватиме сил та енергії для оволодіння математикою, неодмінно буде сторицею винагороджений незрівнянною радістю чи то від розв'язаної задачі, проблеми, чи від створення чогось нового у самій математиці, чи від досягнень своїх учнів.

Щиро бажаємо Тобі успіхів на цьому шляху!

Розділ 1

РОЛЬ МАТЕМАТИКИ У ПІЗНАННІ

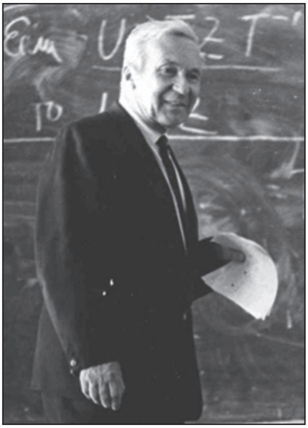
1.1. ЩО ТАКЕ МАТЕМАТИКА?

Математика — найпрекрасніший
і найпотужніший винахід людського духу.

Стефан Банах

Відповісти на запитання «Що таке математика?» непросто і, залежно від рівня математичних знань того, хто ставить це запитання, і того, хто на нього відповідає, ці відповіді будуть різними. Першокласник скаже, що математика вчить рахувати предмети, додавати, віднімати, множити і ділити числа. Учень основної школи, очевидно, переконуватиме, що математика вивчає числа і геометричні фігури, вирази і функції, пропорції, а також учить розв'язувати рівняння і нерівності. Сьогоднішній старшокласник доповнить цей перелік вивченням похідної та інтеграла, випадкових величин, а також математичних моделей. Студент-математик справедливо зазначить, що частинами математики є й логіка, алгебра і теорія чисел, аналітична, проективна геометрії, теорія ймовірностей, диференціальні рівняння, комплексний аналіз, функціональний аналіз, варіаційне числення тощо. Але й це не буде вичерпною відповіддю, оскільки складниками математики є й багато інших дисциплін, серед яких постійно з'являються нові дисципліни, які часто взаємно проникають одна в одну та інші галузі науки й практичної діяльності людини. Крім того, подібні відповіді не з'ясовують суті справи, оскільки лише перераховують дисципліни, що є складовими математики, напрями її досліджень і не відповідають безпосередньо на питання, що саме, який об'єкт вивчає математика. Про хімію, наприклад, можна говорити, як про науку, що вивчає хімічні перетворення речовин, про біологію – як науку про живу природу і життєві процеси, про фізику – як науку, яка досліджує загальні властивості й закони руху матерії та перебігу матеріальних явищ, об'єктом соціології є соціальна реальність, а економічної науки — господарство, виробничі відносини. Математику охарактеризувати в такий спосіб неможливо, оскільки об'єктів чи явищ дійсного світу, які були б предметом математики і не стосувалися б хімічних, біологічних, фізичних, соціальних, економічних та інших явищ, немає.

З'ясувати предмет математики намагалися вчені математики і філософи різних країн ще з часів Аристотеля, однак дійти до єдиної думки їм не вдалося. Численні спроби означити предмет математики і дискусії довкола цього питання зводяться до трьох точок зору. Одна з них репрезентована Ф.Енгельсом у праці «Анти-Дюрінг»: «Чиста математика має своїм об'єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу». Таке уявлення про предмет математики було покладено в основу офіційної точки зору радянських математиків, які мали чітко дотримуватися матеріалістичної позиції. Слабкість цього означення очевидна, особливо для сучасної математики. Тому А. М. Колмогоров, видатний радянський математик (1903 – 1987) у статті «Математика», надрукованій в «Большой советской энциклопедии» (1974 р. вид.), зазначав, що визначення Ф.Енгельса придатне для математики, яка «передує сучасній» (до початку XIX ст.). Стосовно ж математики XIX – XX століть, його можна застосовувати лише за умови надзвичайно розширеного тлумачення термінів «кількісні відношення» і «просторові форми». Щоправда, й Ф. Енгельс не формулював наведену вище думку як означення, а висловив її як заперечення позиції ідеалістів про те, що в чистій (не прикладній) математиці розум має справу не з матеріальними об'єктами, а з продуктами вільної уяви і творчості розуму. У згаданому творі Ф. Енгельс писав так: «Як поняття числа, так і поняття фігури взяті виключно із зовнішнього світу, а не виникли в голові з чистого мислення. Мали існувати речі певних форм і ці форми повинні були порівнюватись, перш ніж можна було дійти до поняття фігури. Чиста математика має своїм об'єктом просторові форми і кількісні відношення дійсного світу, отже, цілком реальний матеріал. Той факт, що цей матеріал набирає надзвичайно абстрактної форми, може лише слабо затушувати його походження із зовнішнього світу. Але щоб бути спроможним дослідити ці форми і відношення в чистому вигляді, треба повністю відокремити їх від їхнього змісту, залишити цей останній осторонь як щось неістотне; у такий спосіб ми дістаємо точки, позбавлені вимірів, лінії, позбавлені товщини й ширини, різні a і b, x і y, сталі і змінні величини, і лише насамкінець ми доходимо до продуктів вільної творчості і уяви самого розуму, а саме, до уявних величин»[1]. А у своїй «Діалектиці природи» Ф. Енгельс пише: «… уся так звана чиста математика займається абстракціями, усі її величини є, строго кажучи, уявні величини», однак, вважає він: «…усі абстракції, доведені до крайності, перетворюються в нісенітницю або у свою протилежність. Математична нескінченність запозичена з дійсності, хоч і неусвідомленим способом, і тому може бути пояснена виключно з дійсності, а не із самої себе, не із математичної абстракції»[2]. Навряд чи можна вважати правомірними подібні міркування стосовно сучасної «чистої» математики, значна частина абстрактних понять якої, що часто є абстракціями від абстракцій, створені уявою, розумом та не відображають жодних об'єктів чи відношень матеріального світу (прикладом подібної абстракції, відомої читачеві зі школи, є комплексне число).



А.М. Колмогоров
читає лекцію

На противагу твердженню про матеріальну природу предмета математики, поширена інша точка зору, репрезентована Н. Бурбакі[3] в «Нарисах з історії математики», яка полягає у тому, що математика – це наука про «математичні структури». Б. В. Гнєденко (1912 – 1995), відомий радянський математик, академік АН УРСР, учень А. М. Колмогорова, роз'яснюючи, що під математичною структурою слід розуміти будь-яку множину, між елементами якої встановлене одне або кілька відношень (виділяють, алгебраїчні, топологічні структури та структури порядку), вважає, що, хоч таке означення відтворює деяку об'єктивну картину того, чим займається математика, оскільки «єдиними об'єктами математики є, власне, те, чим вона займається», однак глибини в ньому нема[4].

Один із найвідоміших бурбакістів Ж. Дьєдонне категорично відстоюючи точку зору про те, що математика лише на стадії зароджен-

---

[1] Маркс К., Энгельс Ф. Соч. Т.20. – С.37 (тут і далі переклади наші. — *Авт.*).

[2] Там же, с.586.

[3] Ніколя Бурбакі – колективний псевдонім групи французьких математиків.

[4] Гнеденко Б.В. Введение в специальность математика.– М.: Наука, 1991.– 240 с.– С. 24–25.

ня і початкового розвитку живилася потребами практики, а на сучасному етапі — вона є виключно витвором розуму й уяви, писав: «Сучасна математика у своїй основі не має жодної утилітарної мети, а є інтелектуальною дисципліною, практична користь від якої зводиться до нуля. Математика – не більше ніж «розкіш», яку може дозволити собі цивілізація»[5)].

Незважаючи на те, що й справді можна навести чимало прикладів видатних математичних відкриттів і результатів, які не мають ніякого відношення до матеріальної дійсності, погодитися з думкою Ж. Дьєдонне також не можна, бо вона дуже однобічна і занадто категорична. Інтенсивний розвиток прикладної математики це тільки підтверджує.

Неоднозначність розуміння суті математики, розгалуженість її розділів та застосувань дають підстави й для третьої точки зору, яка полягає у тому, що сформулювати означення математики чи вичерпно описати її предмет неможливо.

В. Й. Левицький
(1872 – 1956)

Володимир Йосипович Левицький, видатний український математик, писав: «Подати зміст математики — це завдання непосильне; сказати, що це наука про величини та їх взаємні відношення, це буде лише невелика частина, яка не вичерпує її змісту, бо ж до математики, побіч чисел і геометричних величин, побіч величин тяглих і нетяглих (неперервних і дискретних — *Авт.*), входить і наука про комбінаторику, і про групи, і вищі числа і їх комплекси, і про вищі простори і т.д., до яких назву величини можна прикладати лише з деякими застереженнями» (цитування за статтею В.Г. Бевз «Що таке математика?»[6)]).

У книзі Волтера Сойєра[7)] «Прелюдія до математики» читаємо: «Математичні відкриття настільки різноманітні, що одного разу хтось, мабуть, у відчаї, запропонував означити математику, як «усе, чим займаються математики». …Математики розв'язують пробле-

---

[5)] http://www.donnu.edu.ua/journals/dm/_18/3-10%2018_2002.pdf

[6)] Там же.

[7)] **Волтер Сойєр** (1911–2008) — відомий математик і педагог, популяризатор математики. Народився в Англії, викладав на кількох континентах, написав біля десятка книг про математику і математиків, які перекладені багатьма мовами, за що й дістав прізвисько Другого світового Сойєра.

теореми Ферма, наприклад, можуть повністю зрозуміти, у кращому випадку, 10% фахівців з теорії чисел, але це не заважає усім нам не сумніватися, що воно правильне. Принаймні, сьогодні не можна не рахуватися з тим, що складність багатьох математичних проблем перевищує людські можливості. Питання в тому, як і яку математику може «робити» комп'ютер. І над цим потрібно думати.

2.3.4. Гіпотеза Пуанкаре

Жюль Анрі Пуанкаре (1854 – 1912) — видатний французький математик, фізик, астроном і філософ

Серед семи проблем третього тисячоліття першою і поки що єдиною розв'язаною проблемою є гіпотеза Пуанкаре. Офіційною датою її розв'язання вважається 2006-й рік, коли, після всіх фахових експертиз, доведення російського математика Григорія Яковича Перельмана було визнано правильним. Дослідження Г.Я. Перельмана стало найвизначнішою науковою подією 2006 року, а сам автор – найрозумнішою людиною планети. Йому була присуджена найпрестижніша нагорода — Філдсівська медаль, яку називають Нобелівською премією в галузі математики, і премія «Мілленіум» Інституту Клея розміром 1 млн. доларів США. Новина про те, що гіпотеза Пуанкаре доведена, викликала справжній ажіотаж у засобах масової інформації, очолила рейтинги найбільш обговорюваних подій в Інтернеті. У розряд сенсаційних подію вивело ще й те, що автор відкриття, Г.Я. Перельман, відмовився від нагороди і мільйона доларів.

То хто ж такий Пуанкаре? І в чому суть його гіпотези?

Прізвище цього видатного математика ми вже згадували у зв'язку з аналізом механізмів математичної творчості. Однак Анрі Пуанкаре успішно працював у різних галузях науки: комплексному аналізі, небесній механіці, алгебраїчній геометрії, теорії чисел, фізиці світла тощо. Французький математик першим, задовго до Альберта Ейнштейна, сформулював принцип відносності, увів поняття чотиривимірного простору. Анрі Пуанкаре справедливо вважають засновником топології, в якій він отримав багато значних наукових результатів і в якій 1904 року сформулював гіпотезу, що носить його ім'я.

Гіпотеза Пуанкаре полягає в тому, що кожна однозв'язна тривимірна поверхня гомеоморфна тривимірній сфері. Щоб зрозуміти суть цього твердження, достатньо деяких інтуїтивно-наївних уявлень про топологію та її предмет, які, припускаємо, читач отримав із популярної літератури для школярів на тему топології. Тому нехай читач вибачить нас за те, що, можливо, розповідатимемо відомі речі, і все ж, за прикладом авторів подібних видань, популярно пояснимо зміст понять, присутніх у формулюванні гіпотези Пуанкаре.

Уявімо собі, що фігури, виготовлені із міцного еластичного матеріалу, який легко піддається деформаціям, але не ламається і не рветься. Тоді, деформуючи (стискуючи, розтягуючи, згинаючи, але не розриваючи і не склеюючи), наприклад, кубик, можна з нього отримати м'ячик чи стакан, а бублик перетворити, скажімо, на чашку, в якої є вушко з діркою (див. зображення[67]). Думаємо, що читач легко уявив собі ці перетворення і може їх повторити, працюючи із пластиліном. Перетворення (деформація) фігури, при якому не порушується її цілісність і нічого не склеюється, топологи називають гомеоморфізмом, а дві фігури, одну з яких можна перетворити в іншу (і навпаки) за допомогою гомеоморфізму – гомеоморфними. Наприклад, сфера гомеоморфна поверхні куба, але не гомеоморфна поверхні тора (бублика).

З точки зору топології гомеоморфні фігури однакові. Для топології важливі лише ті властивості фігури, які не змінюються при гомеоморфізмі. Такі властивості називають топологічними властивостями, або інваріантами. Топологічним інваріантом є, наприклад, кількість «дірок» (кубик і м'ячик дірок не мають, а бублик і чашка мають одну дірку). Топологія займається вивченням топологічних властивостей (інваріантів) фігур, на відміну від геометрії, яка вивчає форму і розміри фігур. Тому топологію образно називають ґумовою геометрією.

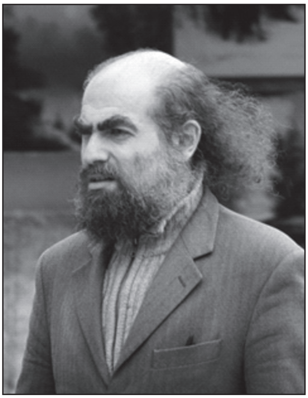
Обмежимося уявленнями про поверхню, які читач має зі школи. Скажемо лише, що зміст його буде уточнюватися в різних дисциплінах вищої математики. Виходитимемо з того, що читач добре уявляє собі сферу (поверхню кулі), поверхні циліндра, призми тощо. Це все — двовимірні поверхні у тривимірному просторі. Лінія на площині (пряма, коло, парабола тощо) — одновимірна. Тривимірна «поверхня» у чоти-

[67] http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Mug_and_Torus_morph.gif

ривимірному просторі — це абстракція, що є узагальненням одновимірних (у двовимірному просторі) та двовимірних (у тривимірному просторі) об'єктів. Геометрично уявити їх неможливо.

І, нарешті, поняття однозв'язності. Поверхню називають однозв'язною, якщо будь-яку замкнену криву на ній можна неперервною деформацією стягнути в точку так, щоб при цьому крива увесь час залишалася на поверхні. Площина, сфера – однозв'язні поверхні, поверхня тора – не однозв'язна (меридіан чи паралель в точку не стягуються).

Якби гіпотезу Пуанкаре сформулювати для тривимірного простору і двовимірних поверхонь у ньому, то вона мала б такий геометричний зміст: «будь-яку однозв'язну поверхню можна неперервно деформувати у сферу або, що те саме, будь-яку фігуру без дірок можна деформувати в кулю». У правильності такого твердження ніхто б не сумнівався. Пуанкаре припустив, що так само буде і для тривимірних поверхонь у чотиривимірному просторі. Григорій Перельман довів, що це справді так.



Г.Я. Перельман
(нар. 1966 р.) — видатний російський математик, довів гіпотезу Пуанкаре

Історія доведення гіпотези Пуанкаре нагадує історію доведення Великої теореми Ферма. Як і Ендрю Вайлс, геній-самітник Григорій Перельман на довгих сім років практично перестав публікуватися і, взагалі, нічим про себе не нагадував. Ніхто не знав, над чим він працює. І раптом, як грім серед ясного неба, — доведення одного, більш загального геометричного факту, із якого безпосередньо випливає гіпотеза Пуанкаре.

Хто такий Григорій Перельман? Народився і виріс у Ленінграді (тепер Санкт-Петербург). Ріс математично обдарованою дитиною. Його незвичайність виявляла себе з раннього дитинства. Уже в шестирічному віці любив класичну музику. Закінчив знамениту 239-у школу з поглибленим вивченням математики, випускниками якої були багато відомих учених, зокрема, Юрій Матіясевич, автор розв'язання десятої проблеми Гільберта. В 1982 р. у складі збірної команди Радянського Союзу брав участь у 23-ій Міжнародній математичній олімпіаді в Будапешті і став там абсолютним переможцем із фантастичним особистим результатом — 42 бали зі 42 можливих. Закінчив математико-механічний факультет Ленінградського університету. Закінчив аспірантуру і працював у Санкт-Петербурзькому відділенні Математичного інституту імені В.О. Стеклова Російської академії наук. Там же в 1992 р. захистив кандидатську дисертацію.

Перебуваючи на стажуванні в США, познайомився особисто з Річардом Гамільтоном і слухав його лекції. Написав кілька оригінальних статей і отримав пропозиції щодо роботи від кількох провідних університетів США. Але не прийняв жодної і повернувся до Санкт-Петербурґа в інститут, в якому працював. З того часу зосередився над гіпотезою Пуанкаре.

Річард Гамільтон (нар. 1943 р.) — американський математик, професор математики Колумбійського університету; коло наукових інтересів: диференціальна геометрія, топологія

Доведення Григорія Перельмана ґрунтується на ідеях, розвинутих на початку 80-их років минулого століття Річардом Гамільтоном, який отримав важливі топологічні висновки із фактів, що стосуються диференціальних рівнянь, а саме, так званих потоків Річчі[68].

Як і у випадку з Великою теоремою Ферма, гіпотеза Пуанкаре знала чимало помилкових доведень. Однак вони також принесли багато користі. У процесі пошуку і виправлення помилок було винайдено нові методи, значно розвинуто теорію, зокрема, й топологію малих розмірностей. Виявилося, що у багатовимірному випадку все значно простіше. Наприклад, уже в 50-і – 60-і роки минулого століття твердження, аналогічні до гіпотези Пуанкаре, були доведені для вищих розмірностей. Тривимірний випадок продовжував залишатися «твердим горішком».

У вересні 2002 р. Григорій Якович Перельман завершив доведення гіпотези Пуанкаре і розмістив своє доведення в Інтернеті на сайті архіву попередніх робіт Лос-Аламоської наукової лабораторії. Через кілька місяців учений розіслав текст доведення спеціалістам, які також працювали над гіпотезою, зокрема Гамільтону. Зазначимо, що Перельман порушував існуючий порядок подачі претенден-

[68] Потік Річчі — це система диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує деформації на багатовидах; названий в честь італійського математика Річчі-Курбастро (1853–1925).

Усі думають, що математика наука суха, нудна і полягає лише в умінні рахувати. Це нісенітниця. Цифри в математиці відіграють мізерну, останню роль. Це – вища філософська наука, наука найвидатніших поетів.

Михайло Остроградський

Математика має потрійну мету. Вона повинна давати інструмент для вивчення природи. Крім того, у неї є філософська спрямованість і, смію сказати, – естетична. Вона має заохочувати філософа до дослідження ідеї числа, простору і часу. До того ж знавцям вона дарує насолоду, схожу до тієї, яку отримують від живопису й музики. Вони захоплюються стрункою гармонією чисел і форм, їх вражає, коли нове відкриття розгортає перед ними неочікувані перспективи... Щоправда, лише небагатьом обраним дарований привілей відчувати це повною мірою. Але хіба не так само відбувається і з усіма високими мистецтвами? Тому я без тіні вагання скажу, що математику слід леліяти заради неї самої, а теорії, які не знаходять застосування у фізиці, треба вивчати так само, як і будь-які інші.

Анрі Пуанкаре

Математика також може похвалитися творчою уявою, своїми чудовими теоремами, своїми доведеннями і методами, досконалість форми яких зробило їх класичними. Занадто вже «практичний» той, хто не може побачити поезії в математиці.

Вальтер Вайт

У людей, які часто стикаються з математикою, врешті-решт з'являється почуття математичної витонченості використовуваних прийомів, здатність відчувати математичну красу теорій.

Поль Дірак

Хороша музика, – «дар божественних звуків», – вона будується зі суворим дотриманням форми. У фугах Баха, як в алгоритмі, як у формулі, є строга послідовність. У цій строгості – джерело їх вражаючої сили. Так само у строгій послідовності математичних об'єктів є своя внутрішня музика, своя краса – жар холодних формул. Але так само, як для розуміння структури музики потрібна музична культура, так і переживання краси математики потребує культури математичної.

Олександр Александров

Математика зачаровує нас, неначе квітка лотоса.

Аристотель

Для мене знайти доведення математичної теореми дорожче, ніж здобути все персидське царство.

Демокріт

Кажуть, що в голові Архімеда уяви було набагато більше, ніж у голові Гомера.

Вольтер

З усіх мов світу найкраща – це мова штучна, вельми стисла мова, мова математики.

Микола Лобачевський

Хіба не можна музику описати як математику почуття, а математику – як музику розуму? Адже суть обох одна й та ж. Музикант відчуває Математику, математик думає Музикою. Музика – це мрія. Математика — це діяльне життя. І кожна досягне своєї вершини за допомогою іншої, коли людський інтелект, розвинутий до досконалості, засяє, прославлений якимось майбутнім Моцартом-Діріхле чи Бетховеном-Ґауссом – союзом, що уже досить виразно провіщено генієм та працями Гельмгольца.

Джеймс Сильвестр

Незвична краса панує у царині математики, краса, подібна не так до краси мистецтва, як до краси природи; розважливий розум уміє цінувати цю красу так само, як і красу природи.

Ернст Куммер

За покликанням насправді ми поети, тільки наш обов'язок – усе, що вільно творимо, ретельно пізніше доводити.

Леопольд Кронекер

Мені здається, що поет має бачити те, чого не бачать інші, бачити глибше, ніж інші. Це саме повинен і математик.

Софія Ковалевська

У математиці так само, як і в музиці, малярстві або поезії. Будь-хто може стати юристом, лікарем чи хіміком і досягти в обраній галузі успіху, якщо він тямущий і працьовитий, але стати художником чи музикантом, чи математиком може не кожен: звичайна тямущість і працьовитість, самі по собі, нічого тут не важать.

Август Мебіус

Щоб творити музику, треба любити музику, а не успіх (або, принаймні, музику не менше, ніж успіх). А щоб стати математиком, треба захоплюватися чарівністю закономірностей і логічною стрункістю законів.

Волтер Сойєр

Якби в математиці не було краси, то, мабуть, не було б і самої математики. Бо яка ж тоді сила притягувала б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?

Микола Чайковський

Пізнати істинну красу рівнянь може тільки фахівець. Ця естетика – поки що для небагатьох. Але про те, що вона існує, мають знати всі, бо інакше будь-які естетичні уявлення будуть обмежені.

Єремій Парнов

Математика – це широкий розкішний краєвид, відкритий усім, для кого мислення становить справжню радість.

В. Фухс

Він став поетом – для математики у нього не вистачило фантазії.

Давид Гільберт про одного зі своїх учнів

У задачах з елементарної геометрії іноді доводиться використовувати дуже дотепні, тонкі прийоми; і той, хто в молодості пізнав їхню чарівність, ніколи їх не забуде.

Еміль Борель

Математика в усі часи була і залишається «першою красунею» серед наук і, отже, естетичні принципи науки найбільш яскраво виявляються в математиці.

Олександр Волошинов

Математика є прообраз краси світу.

Йоганн Кеплер

Математики схожі на закоханих... Погодьтеся з математиком у якомусь найпростішому твердженні, і він виведе з нього наслідок, із яким ви також вимушені будете погодитись, а із цього наслідку – ще один.

Бернар Фонтенель

ЗМІСТ