ПЕРЕДМОВА

Якість математичної освіти у великій мірі залежить від наявності навчальної літератури, яка написана доступною мовою та на високому науково-методичному рівні. Особливо це стосується видань, в яких викладаються фундаментальні поняття, що є основою для вивчення багатьох дисциплін.

До переліку таких понять в першу чергу входять ті, що формуються при вивченні дисципліни «Математичний аналіз». Незважаючи на те, що за даним курсом написано достатньо велика кількість хороших підручників і посібників, видання їх не закінчується. При цьому не тільки вносяться зміни та доповнення, а й удосконалюється методика викладання матеріалу.

Мета посібника — ознайомлення студентів із основними методами розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем, завдання — допомогти в оволодінні алгоритмами розв'язання задач із теорії звичайних диференціальних рівнянь та застосувати набуті навички у самостійній роботі.

Матеріал посібника розбитий на 6 параграфів. Кожний параграф починається теоретичною частиною, в якій викладено основні математичні поняття. При цьому розкриваються найбільш важливі поняття теорії, наведено розв'язання типових задач і завдання для самостійної роботи. Описано методи розв'язання диференціальних рівнянь першого, другого, n-го порядків, систем диференціальних рівнянь, елементи теорії стійкості.

При вивченні диференціальних рівнянь першого порядку розглянуто зокрема: загальні поняття та означення, задача Коші; диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними; однорідні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння, які зводяться до них; лінійні диференціальні рівняння, рівняння Бернуллі; диференціальні рівняння в повних диференціалах; диференціальні рівняння, не розв'язні відносно похідної.

Для диференціальних рівнянь вищих порядків наведено основні поняття й означення; сформульовано задачу Коші; класифіковано диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку; розглянуто лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами з правими частинами спеціального вигляду, метод варіації сталих.

Для нормальних систем диференціальних рівнянь наведено основні поняття й означення; сформульовано задачу Коші, описано розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення, а також нормальні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

При вивченні елементів теорії стійкості дається поняття про теорію стійкості Ляпунова, досліджується поведінка траєкторії диференціального рівняння в околі особливої точки.

До кожного параграфа пропонуються систематизовані добірки задач для самостійного розв'язування. Запропоновані задачі мають тренувальний і контролюючий характер і можуть бути використані для проведення як практичних занять, так і для самостійної роботи.

Структура посібника сприяє розвитку й активізації самостійної роботи студентів.

Посібник розрахований на студентів вищих навчальних закладів природничих, технічних та економічних спеціальностей.

§1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЇХНІЙ ПОРЯДОК, ЗАГАЛЬНИЙ І ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗКИ ТА ІНТЕГРАЛИ

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y=f(x)$ та її похідні.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння.

Диференціальне рівняння n***-го порядку*** у загальному вигляді записується так:

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 .$$

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція $y=f(x)$, яка перетворює це рівняння у тотожність. Розв'язок $F(x,y)=0$, заданий у неявному вигляді, називається ***інтегралом диференціального рівняння.*** Графік розв'язку диференціального рівняння називається ***інтегральною кривою.***

Задача Коші. *Знайти розв'язок* $y=f(x)$ *диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ y''(x_0)=y''_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

де x_0, y_0, y'_0, y''_0, …, $y_0^{(n-1)}$ *— задані числа.*

Загальним розв'язком диференціального рівняння n***-го порядку*** називається функція $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, яка має такі властивості:

1) при будь-яких значеннях довільних сталих C_1, C_2, …, C_n вона перетворює рівняння у тотожність;

2) значення сталих C_1, C_2, …, C_n можна підібрати так, щоб вона задовольняла початкові умови.

Загальний розв'язок, який заданий у неявному вигляді

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0 ,$$

називається ***загальним інтегралом***.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального, якщо надати визначені значення довільним сталим, тобто розв'язок вигляду

$$y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0) ,$$

де C_1^0, C_2^0, …, C_n^0 — фіксовані числа.

Частинним інтегралом диференціального рівняння називається інтеграл, який одержується із загального розв'язку шляхом фіксування довільних сталих:

$$\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0)=0 ,$$

де C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0 — фіксовані числа.

Приклад 1. Визначити порядок диференціального рівняння:

1) $y''+5y'-4y+2=0$; 2) $x(x-1)y'-(2x-1)y-(2x-1)=0$;

3) $y^{IV}-25y''=0$; 4) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

◀Перше рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку, оскільки порядок старшої похідної, яка входить у це рівняння, дорівнює 2, друге — рівнянням першого порядку, бо воно містить тільки першу похідну. У першому рівнянні коефіцієнти при y, y', y'' і вільний член є числами, у другому рівнянні вони залежать від x.

Третє рівняння є рівнянням четвертого порядку, оскільки порядок старшої похідної дорівнює 4, четверте — рівнянням третього порядку, оскільки третя похідна є старшою похідною, яка міститься у цьому рівнянні. Третє рівняння не містить y, y', y''' і x, четверте також не містить x.▶

Приклад 2. Перевірити, чи функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y'''+64y=0$.

◀Знайдемо похідні даної функції:

$$y'=-4e^{-4x},\ y''=16e^{-4x},\ y'''=-64e^{-4x}.$$

Підставляючи вирази для y і y''' у диференціальне рівняння, одержимо тотожність

$$-64e^{-4x}+64e^{-4x}\equiv 0.$$

Це означає, що функція $y=e^{-4x}$ є розв'язком рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він не містить довільних сталих.▶

Приклад 3. Перевірити, чи функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ задовольняє рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$. Чи є цей розв'язок загальним?

◀Знаходимо похідні даної функції:

$$y'=2C_1e^{2x}+\frac{1}{2},\ y''=4C_1e^{2x}.$$

Підставляємо вирази для y, y' і y'' у шукане рівняння:

$$4C_1e^{2x}-5\left(2C_1e^{2x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}-10C_1e^{2x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Оскільки одержано тотожність, то функція $y=C_1e^{2x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком даного рівняння. Цей розв'язок не є загальним, бо він містить тільки одну довільну сталу, а порядок рівняння дорівнює 2.▶

Приклад 4. Переконатися у тому, що функція $y=C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є розв'язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◀Знаходимо похідні

$$y'=3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2},\ y''=9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x}$$

і, підставивши вирази для y, y' і y'' у дане рівняння, одержуємо тотожність

$$(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x})-5\left(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=(9C_1e^{3x}+9C_2e^{3x})-5(3C_1e^{3x}+3C_2e^{3x})-\frac{5}{2}+6(C_1e^{3x}+C_2e^{3x})+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Отже, дана функція є розв'язком диференціального рівняння. Цей розв'язок є частинним, бо він містить лише одну незалежну сталу (сталі C_1 і C_2 у даному випадку не є незалежними: їхню кількість можна зменшити; оскільки сума двох сталих також є сталою, то можна позначити $C_1+C_2=C$), тоді

$$y=Ce^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}.\blacktriangleright$$

Приклад 5. Показати, що функція $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ є загальним розв'язком рівняння $y''-5y'+6y=3x-1$.

◀Дана функція містить дві незалежні довільні сталі (їхню кількість не можна зменшити, як у попередньому прикладі).

Оскільки

$$y'=2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2},\ y''=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x},$$

то підстановка виразів y, y', y'' у рівняння зводить його до тотожності

$$(4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x})-5\left(2C_1e^{2x}+3C_2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)+6\left(C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=4C_1e^{2x}+9C_2e^{3x}-10C_1e^{2x}-15C_2e^{3x}-\frac{5}{2}+6C_1e^{2x}+6C_2e^{3x}+3x+\frac{3}{2}\equiv 3x-1.$$

Отже, дана функція задовольняє рівняння, а це означає, що вона є загальним розв'язком даного диференціального рівняння.▶

Приклад 6. Задано загальний розв'язок $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ диференціального рівняння $y''+9y=0$. Який частинний розв'язок одержується при $C_1=2$, $C_2=3$? При яких значеннях параметрів C_1 і C_2 одержуються частинні розв'язки: $y=\cos 3x$, $y=\sin 3x$?

◀Підставляючи значення $C_1=2$, $C_2=3$ у формулу для загального розв'язку, одержимо частинний розв'язок $y=2\cos 3x+3\sin 3x$. Частинний розв'язок $y = \cos 3x$ одержується із загального при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, а частинний розв'язок $y = \sin 3x$ — при $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.►

Приклад 7. Показати, що функція $y^2 + x^2 - Cy = 0$ є загальним інтегралом диференціального рівняння $y'(y^2 - x^2) + 2xy = 0$.

◄Диференціюючи по x дану неявну функцію, одержимо

$$2yy' + 2x - Cy' = 0,\ y'(2y - C) = -2x,\ y' = \frac{2x}{C - 2y}.$$

З рівняння $y^2 + x^2 - Cy = 0$ знаходимо сталу $C = \dfrac{y^2 + x^2}{y}$ і підставляємо її вираз у формулу для похідної y':

$$y' = \frac{2x}{\dfrac{y^2 + x^2}{y} - 2y} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Підстановка похідної у диференціальне рівняння зводить його до тотожності

$$\frac{2xy}{x^2 - y^2}(y^2 - x^2) + 2xy \equiv 0.$$

Отже, неявна функція $y^2 + x^2 - Cy = 0$, залежна від однієї довільної сталої, є розв'язком диференціального рівняння, тобто є його загальним інтегралом.►

Приклад 8. Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція $y = C_1 x - C_2$, яка залежить від двох довільних сталих.

◄Двічі диференціюючи дану функцію, виключаємо сталі C_1 і C_2: $y' = C_1$, $y'' = 0$. Отже, рівняння $y'' = 0$ задовольняє умову задачі.►

Приклад 9. Скласти диференціальне рівняння, загальний розв'язок якого має вигляд $y = C_1 x - \dfrac{C_2}{x}$.

◄Диференціюючи дану функцію, одержимо:

$$y' = C_1 + \frac{C_2}{x^2},\ y'' = -\frac{2C_2}{x^3}.$$

З рівнянь

$$y = C_1 x - \frac{C_2}{x},\ y' = C_1 + \frac{C_2}{x^2}$$

виключаємо C_1. Помноживши друге рівняння на x і віднявши від нього перше, одержимо

$$xy' - y = \frac{2C_2}{x}.$$

Додаючи це рівняння до рівняння

$$y''=-\frac{2C_2}{x^3},$$

помноженого на x^2, виключимо C_2:

$$xy'-y+y''x^2=0.$$

Одержане рівняння є шуканим.►

Приклад 10. Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих $y=Cx^4$.

◄Диференціюючи дану функцію, одержуємо $y'=4Cx^3$. Підставляючи сюди вираз $C=\frac{y}{x^4}$, одержаний з даного рівняння, знаходимо шукане диференціальне рівняння $y'=4\cdot\frac{y}{x^4}\cdot x^3$, або $y'=\frac{4y}{x}$.►

Задачі для самостійного розв'язування.

Визначити порядок диференціального рівняння.

1. $y'+p(x)y=q(x)$.
2. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$.
3. $y'''-ay''+by'+cy=0$.
4. $y^V+y^{IV}-y=0$.
5. Загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-4y'+3y=0$ має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. Знайти частинні розв'язки у випадках:

а) $C_1=0$, $C_2=1$; б) $C_1=1$, $C_2=0$; в) $C_1=1$, $C_2=-2$.

6. Загальний інтеграл диференціального рівняння $2xyy'=y^2-x^2$ має вигляд $x^2+y^2-Cx=0$. Знайти частинні інтеграли при $C=4$, $C=-6$, $C=-8$, $C=10$ і побудувати їх.

З'ясувати, чи функція є розв'язком диференціального рівняння.

7. $xy'=2y$, $y=5x^2$.
8. $y''=x^2+y^2$, $y=\frac{1}{x}$.
9. $(x+y)dx+xdy=0$, $y=\frac{C^2-x^2}{2x}$.
10. $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$.
11. $y'=y\operatorname{ctg}x+2\operatorname{ctg}x$, $y=3+4\operatorname{tg}x$.
12. $xy^2y'=x^2+y^3$, $y=x^3$.
13. $y'\sin x=y\ln y$, $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.
14. $y'=xe^{x^2}(1+y^2)$, $y=e^{-x^2}$.
15. $y''+4y'+5y=0$, $y=e^{-2x}\sin x$.
16. $y''-4y'+4y=0$, $y=xe^x$.
17. $y''-2y'+y=0$, а) $y=xe^x$, б) $y=x^2e^x$.

Перевірити, чи функція задовольняє диференціальне рівняння; з'ясувати, яким розв'язком вона є — загальним чи частинним.

18. $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$. 19. $\ln x \ln y=C$, $y\ln y+x\ln xy'=0$.

20. $y=Ce^{-2x}$, $y'+2y=0$. 21. $y-x+C_1\ln y=C_2$, $yy''=(y')^2-(y')^3$.

22. $x^2+2xy=C$, $(x+y)+xy'=0$. 23. $y=-x-\dfrac{\sin 2x}{2}$, $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

24. $y=x(\ln x^2+C)$, $xy'-y=2x$. 25. $x^2+y^2=C^2$, $x+yy'=0$.

26. $y^2-x^2=2y$, $y'(x^2+y^2)-2xy=0$. 27. $y=C_1e^x\sin x$, $y''-2y'+2y=0$.

28. $y=\dfrac{1}{2}(x+1)^4+(x+1)^2$, $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^3$.

29. $y=x^2\ln x+C_1x^2+C_2x+C_3$, $xy'''=2$.

30. $y=C_1x+C_2x^2$, $x^2y''-2xy'+2y=0$.

31. $y=C_1\sin 7x+C_2\cos 7x$, $y''+49y=0$.

32. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$, $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

Перевірити, чи для диференціального рівняння співвідношення є його інтегралом.

33. $(x-y+1)y'=1$, $y=x+Ce^y$.

34. $(x-2y)y'=2x-y$, $x^2-xy+y^2=C^2$.

35. $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

Знайти диференціальне рівняння сукупності кривих.

36. $y=Cx$. 37. $y=Ce^x$. 38. $y=C\sin x$.

39. $y=Cx^2$. 40. $y^2=2Cx$. 41. $x^2+y^2=C^2$.

42. $x^3=C(x^2-y^2)$. 43. $y^2+\dfrac{1}{x}=2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}$. 44. $\ln\dfrac{x}{y}=1+Cy$.

Знайти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція.

45. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-4x}$. 46. $y=C_1\sin 5x+C_2\cos 5x$.

47. $y=C_1+C_2\sin(x+C_3)$. 48. $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}+C_3$.

49. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{3x}$. 50. $y=C_1e^{-3x}+C_2\cos 2x$.

Для сукупності кривих знайти лінію, яка задовольняє початкові умови.

51. $x^2-y^2=C^2$, $y(0)=5$. 52. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

53. $y=C_1\sin(x-C_2)$, $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=0$.

54. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$.

ЗМІСТ