

Натисніть тут, щоб
купити книгу на сайті
або

замовляйте по телефону:

(0352) 28-74-89, 51-11-41

(067) 350-18-70

(066) 727-17-62

Геометрія

В.О. Тадесв

«ГЕОМЕТРІЯ»

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Ланій

Тадеев В.О.

Т12 Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. /
В.О. Тадеев. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. —
296 с : іл. + 1 електрон. опт. диск (CD). — Електрон. версія. —
Режим доступу: <http://www.bohdan-digital.com/edu>.

ISBN 978-966-10-3446-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту
і чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних
закладів. У підручнику значна увага приділяється питанням
історичного, світоглядного та методологічного характеру.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

*Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена
в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва*

ISBN 978-966-10-3446-3

© Тадеев В.О., 2015
© Навчальна книга – Богдан,
оригінал-макет, 2015

Піктограмою  у підручнику позначено ті його складові, які можна відкрити у pdf-файлі або скориставшись CD, що входить у комплект.

У зв'язку з великим обсягом електронної складової підручника, у pdf-файлі активною є тільки її частина. Для завантаження всіх матеріалів треба перейти за посиланням:

<http://www.bohdan-digital.com/edu>.

Переднє слово до учнів

Шановні друзі! Ви розгорнули підручник з геометрії, науки, яка споконвіку вражала людський розум своєю довершеністю. З давніх-давен геометрія вважалася неперевершеною школою мудрості, вивчення якої розвивало й шліфувало мислення. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, було вирізьблено напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінувалася ця наука? — За те, що розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох своїх легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на першому місці вони завжди називали ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, довів лише декілька простих геометричних істин. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись геометрії, ви навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... Давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, залишаючись водночас основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у мандрах казкового Гуллівера, героя роману Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталось довкола геометрії. Навіть їхня буденна мова рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього не було б. Геометричними термінами тепер пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні, мистецтвознавство, мова щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площа, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, аби правильно розуміти і вживати ці слова, потрібно

знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно сказав Галілей, «написана мовою геометрії».

Отже, навчаючись геометрії, ви прилучатиметеся до надбань світової культури, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями із варварських епох.

І ось ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні споруди, мобільний зв'язок, GPS-навігація, проникнення у глибини космосу і матерії... Геометричні ідеї і принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, і з практичної точки зору геометрія необхідна.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємодоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі.

Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із цих завдань відведено належне місце.

Крім цього, по всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, кожен з яких має своє символічне значення:



На уроки вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне зображення Афіни з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Задачі і вправи розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростання їхньої складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — темним. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах). Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику вміщено з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом вирішують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних фактів, а в окремих випадках — і корисні нові відомості та загальні підходи до розв'язування геометричних задач.

У підручнику є матеріал «Для тих, хто хоче знати більше». Він розрахований на учнів, які вже зараз, не чекаючи старших класів, хочуть дізнаватися про математику більше. Ці тексти супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Їхній життєвий шлях переконливо свідчить, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку математики. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому розумінню науки.

У кінці кожного розділу подається зведений перелік усього вивченого теоретичного матеріалу, а в рубриці «Перевір себе» — питання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкса з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!



Зірка геометрії.

Фрагмент композиції Ігоря Макаревича та Олени Єлагіної
«Геометрія космосу» (2008 р.)

Зображені у цій композиції креслярські прилади — лінійка, транспортир і косинець — допомагати-
муть нам фіксувати ті основні фігури на площині та їхні властивості, які слугують основою геометрії.

Розділ I

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Вступ

«Мислю — отже, існую» — так коротко охарактеризував сутність людського буття знаменитий французький філософ і математик XVII ст. Рене Декарт. Цим він стверджував, що справжнє життя людини невід’ємне від мислення і неможливе без нього.

Мислення багатогранне, як багатогранний світ довкола нас. Зокрема, оскільки ми живемо у просторі, то повинні вміти мислити просторовими образами. Особливо, якщо прагнемо не тільки пристосовуватися до умов, а й пізнавати, удосконалювати світ.

Просторові образи інакше називають ще **формами** або **геометричними фігурами**. Наука про геометричні фігури називається **геометрією**.

Зародки геометрії виникли дуже давно, ще коли головними просторовими формами, з якими людині доводилося мати справу, були шляхи та ділянки землі. Звідси й назва «геометрія», що в перекладі з грецької якраз і означає «вимірювання землі». Проте з часом до цієї первісної геометрії долучалися нові форми. З удосконаленням будівництва геометричні форми здійсмалися вгору, з

Урок 1



Рене Декарт.

Портрет голландського художника Франса Хальса.
Париж, Лувр.

успіхами астрономії — поширювалися на космічні простори, з розвитком фізики занурювалися углиб матерії.

Придивіться до будь-якої архітектурної споруди і ви побачите, як гармонійно поєднуються у ній численні лінії та інші деталі — відрізки, дуги, кути, трикутники, прямокутники, круги, паралелепіпеди, призми тощо. Отже, у вас уже є певний інструментарій для осмисленого сприйняття просторової конструкції. Але чи зможете ви пояснити, як вибрані та взаємопов'язані ці деталі, як розраховані їхні розміри? Те саме можна спитати стосовно плану вашого мікрорайону, парку, спортивного чи торговельного комплексу.

А як знаходять відстані до недоступних об'єктів, як визначили розміри Землі та інших планет, як створюють географічні та астрономічні карти?

Нарешті, як функціонує комп'ютерна графіка — цей невичерпний сучасний ресурс для проектування й зображення геометричних фігур?

Розуміння цих речей потребує значно глибшого вивчення геометрії. Мало закріпити в пам'яті назви



Фрагмент архітектури
готичного храму



Ансамбль Маріїнського
палацу в Києві



Архітектурний проект, побудований засобами 3D комп'ютерної графіки

геометричних фігур та навчитися їх розпізнавати, навіть, зображати. Потрібно ще й уявляти, як встановлюються зв'язки між різними їхніми складовими і як на основі цих зв'язків фігури конструюються. Це так само, як для вправного володіння мовою недостатньо лише певного словникового запасу, а потрібне знання граматики та синтаксису, або як для музичної творчості недостатньо лише нотної грамоти й набору «акордів», а необхідне знання основ композиції.

Для втілення цих ідей вивчення геометрії потрібно розпочати з детального вивчення найпростіших геометричних фігур, аби потім можна було крок за кроком переходити до складніших фігур і відкривати те, як ці складніші конструюються з найпростіших.

До найпростіших геометричних фігур належать точки, прямі і площини, а також відрізки, промені і кути. Ці фігури й будуть предметом вивчення у цьому розділі.

§1. Площина. Точки і прямі

Площину ми будемо уявляти у вигляді великого аркуша або класної дошки, які можна як завгодно продовжити у будь-якому напрямку. Вважатимемо, що всі геометричні фігури розміщені на площині. Площина — латинською «планум». Тому ту частину геометрії, в якій вивчаються фігури на площині, називають *планіметрією*. Стереометрія, тобто геометрія у просторі, вивчається у старшій школі.

Найелементарнішими фігурами вважаються **точки**. *Будь-яка інша фігура складена з точок.*

Уважається, що точка не має розмірів, хоч на рисунках точки зображуються невеликими кружечками. Знаменитий давньогрецький учений Евклід, який написав перший підручник з геометрії, називав точкою «те, що не має частин». Точки можна уявляти

як сліди на аркуші від тонко загостреного олівця. *На площині існує безліч точок.*

Точки зазвичай позначаються великими літерами латинського алфавіту. На рис. 1.1 зображено деяку фігуру і позначено декілька її точок A, B, C, D, E, K, M .

Ще однією з найпростіших фігур є **пряма** лінія, або просто пряма. Уявлення про пряму дає лінія, проведена під лінійку (рис. 1.2). Однією з найголовніших властивостей прямої є те, що пряма цілком визначається двома своїми точками:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

Цю властивість називають *властивістю проведення або побудови прямої*.

На властивості проведення прямої засновується простий практичний спосіб для перевірки правильності лінійки. Якщо через дві точки провести під лінійку дві лінії, по-різному розміщуючи лінійку, як показано на рис. 1.3, і ці лінії не зіллуться, то лінійка неправильна.

Властивість проведення прямої передбачає, що пряма не має ніякої товщини, бо інакше кожна товщина визначала б свою лінію, яка проходить через ті самі точки. Тим часом така пряма має бути єдиною.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. На рис. 1.4 зображено дві прямі — пряму AB (її можна також позначити як BA) і пряму l .

Як і площина, пряма вважається необмеженою, хоча на рисунку, звісно, зображується лише певна обмежена частина прямої. Як і на площині, *на кожній прямій існує безліч точок.*

Якщо якась точка лежить на прямій, то кажуть також, що ця точка *належить* прямій, або що пряма проходить через цю точку. На рис. 1.5 зображено дві точки A і B , які належать прямій l , а також дві точки P і Q , які не належать їй.

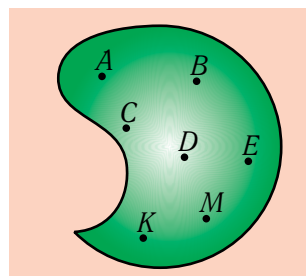


Рис. 1.1

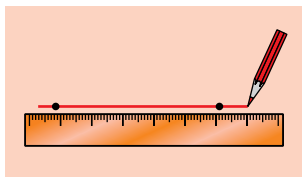


Рис. 1.2

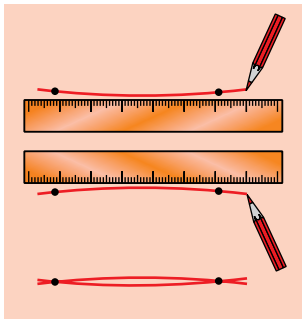


Рис. 1.3

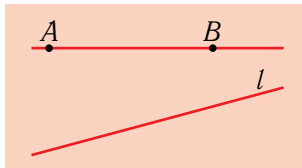


Рис. 1.4

Із властивості проведення прямої випливає, що дві різні прямі можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби вони мали дві спільні точки, то збігалися б, оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму.

Про дві прямі, які мають одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються* у цій точці. На рис. 1.6 зображено дві прямі m і n , які перетинаються у точці P .

Якщо прямі не мають жодної спільної точки, то вони називаються *паралельними* (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»). На рис. 1.7 зображено паралельні прямі a і b . Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

Уявлення про площину дає не тільки аркуш паперу або класна дошка. Площину може представляти будь-яка інша рівна поверхня, наприклад, стола, стелі, стіни, підлоги, спортивного майданчика, навіть просто рівної відкритої місцевості.

Так само й точки можуть представлятися не тільки слідами від олівця, а й іншими реальними об'єктами, розмірами яких можна знехтувати. Звісно, тоді проведення прямих виглядатиме по-іншому. На цьому ґрунтуються практичні застосування геометрії.

Наприклад, під час розбивки газонів, доріжок, фундаменту під забудову тощо точки фіксують кілками, а прямі проводять за допомогою мотузок (шнура) (рис. 1.8). Аналогічно чинять малярі (рис. 1.9), напинаючи шнур, змашений смолою або крейдою, між точками, через які потрібно провести пряму, а потім відпускаючи його. У кожному із таких застосувань виходить така собі «мотузьяна» геометрія.

Принципово інакше діють геодезисти. Вони фіксують точки довгими палицями — віхами, а прямі «провішують» за допомогою візування. А саме:

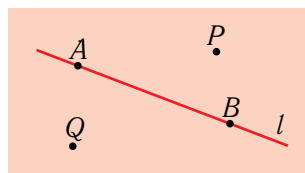


Рис. 1.5

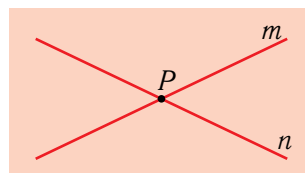


Рис. 1.6

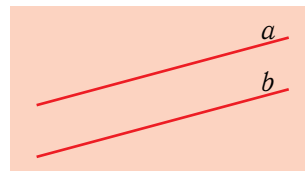


Рис. 1.7

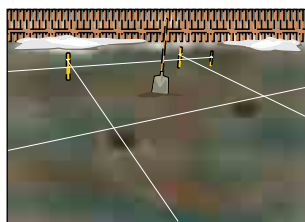


Рис. 1.8

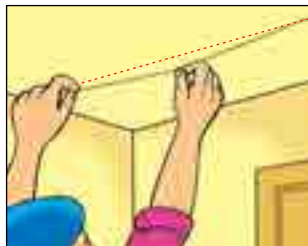
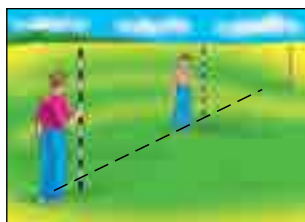
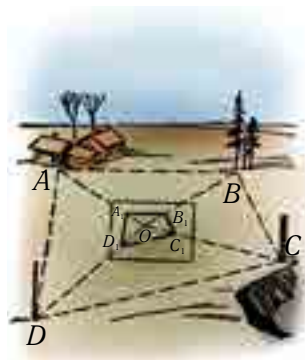


Рис. 1.9



а)



б)

Рис. 1.10

визначивши пряму двома віхами A і B , інші віхи C , D , ... ставлять між ними так, щоби при спостереженні із-за віхи A вони закривали віху B (рис. 1.10, а). За допомогою візування проводять і топографічні зйомки для складання планів місцевості або «прив'язки» до місцевості нового об'єкта для будівництва (рис. 1.10, б). Таку геометрію умовно можна назвати «променевою», оскільки роль прямих у ній відіграють зорові промені.

Те, що «мотузяна» геометрія збігається із «променевою» — радше щаслива випадковість, ніж необхідність. Неважко уявити собі такі фізичні умови, при яких цього не було б. Наприклад, такого не було б на планеті Маленького Принца з відомої повісті Антуана де Сент-Екзюпері (рис. 1.11). Ця планета була дуже маленькою, а тому шнур, напнутий між двома її точками, відхилявся б від зорового променя між ними. Те само стосується й нашої планети Земля, якщо брати її у великих масштабах.



Рис. 1.11.

Маленький принц
на своїй планеті.
Рисунок Сент-Екзюпері



Рис. 1.12

Для великих земних масштабів існує інша геометрія — *сферична*, яка суттєво відрізняється від геометрії на площині, тобто від планіметрії. Відмінність проявляється уже у властивості проведення прямої: на сфері можливе таке розміщення двох точок, при якому через них можна провести безліч сферичних прямих. Ви легко збагнете це, подивившись на глобус і на його меридіани, які перетинаються на Північному і на Південному полюсах (рис. 1.12).

Вивчаючи геометрію на площині, ми й далі не раз проводитимемо порівняння її з геометрією на сфері. Сферичну геометрію започаткували античні астрономи. Для них зручно було вважати, що небесні світила розміщуються на небесній сфері. В астрономії ця модель зоряного неба застосовується й досі. В епоху Великих географічних відкриттів та Відродження, сферична геометрія давніх астрономів «спустилася» з небесної сфери на земний глобус і в такий спосіб стала поруч із прадавньою площинною геометрією. Яскравим відображенням цього нового світогляду стали геометричні та астрономічні атрибути у живописних та графічних творах тієї епохи.



Мартен де Вос. Геометрія.
Гравюра. Бл. 1600 р.



Жан Леблон. Геометрія.
Гравюра (1636 р.)



Вправи і задачі

- 1°. Побудуйте з допомогою лінійки пряму і позначте на ній три точки A , B , C . Випишіть усі можливі позначення для цієї прямої.
- 2°. На рис. 1.13 зображено дві прямі a і b та сім точок.
 - 1) Як ще можна позначити ці прямі?
 - 2) Назвіть точки, які належать прямій a , але не належать прямій b .
 - 3) Назвіть точки, які належать прямій b , але не належать прямій a .
 - 4) Назвіть точки, які належать кожній із прямих.
 - 5) Назвіть точки, які не належать жодній із прямих.

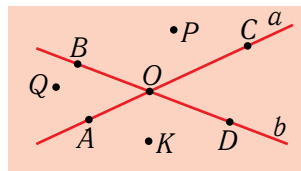


Рис. 1.13

- 3°. Позначте в зошиті дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте потім дві точки K, L , які належать цій прямій, і дві точки M, N , які не належать їй. Що можна стверджувати про взаємне розміщення прямих: а) AB і KL ; б) AB і KM ; в) KN і BA ?
- 4°. Проведіть дві прямі, що перетинаються. Позначте ці прямі і точку їхнього перетину. Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?
- 5°. На рис. 1.14 зображено три прямі. Назвіть ці прямі. Які з них перетинаються?
- 6°. Побудуйте таке розміщення чотирьох точок A, B, C, D , щоб точки A, B, C належали одній прямій і точки B, C, D належали одній прямій.
7. Чи можуть три прямі перетинатися в одній точці? Як взагалі можуть розміщуватися три прямі, щоб кожні дві з них перетиналися? Зробіть відповідні рисунки.
8. Проведіть пряму, а потім ще три прямі, які її перетинають. Які можливі характерні випадки взаємного розміщення усіх цих прямих?
9. На рис. 1.15 відображено спосіб перевірки якості обробки рейки за допомогою візування. Як би ви його пояснили?
10. Прямі l і m перетинаються в точці O , M — якась точка прямої m . Чи може точка M належати прямій l ?
11. Скільком прямим може належати одна взята точка; дві взяті точки; три взяті точки; п'ять узятих точок?
12. На рис. 1.16 відображений один із так званих обманів зору (зорову ілюзію): лінії AB і CD видаються вигнутими, хоча насправді вони прямі. Виконайте цей рисунок у зошиті і перевірте, чи викликатиме він такий самий обман зору.
- 13°. Позначте в зошиті дві точки A і B . Скільки прямих можна провести через точку A ? Скільки — через точку B ? Скільки — через обидві точки A і B ? Чи можете ви обґрунтувати свої твердження?
- 14°. Позначте в зошиті чотири точки A, B, C, D так, як показано на рис. 1.17, а потім через кожні дві з них проведіть пряму. Скільки всього прямих буде проведено? Чи завжди чотири точки визначатимуть таку кількість прямих? Розгляньте можливі випадки.
- 15°. а) Проведіть такі чотири прямі a, b, c, d , щоби прямі a, b, c проходили через одну точку і прямі b, c, d проходили через одну точку.
б) Будь-які дві із чотирьох прямих перетинаються. Скільки може бути точок перетину? Зобразіть усі можливі випадки.

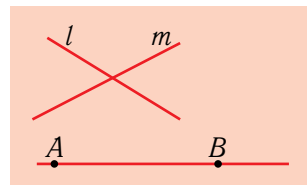


Рис. 1.14



Рис. 1.15

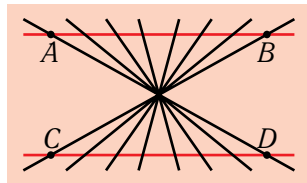


Рис. 1.16

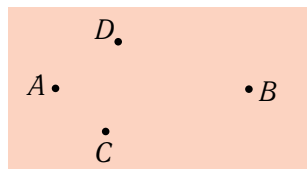


Рис. 1.17