

## Рекомендації для вчителів

У посібнику пропонуємо тренувальні вправи для тематичного оцінювання з усіх тем курсу алгебри і початків аналізу та геометрії для 11 класу (академічний рівень) відповідно до державної програми з математики для 10–11 класів, витяги з якої у вигляді Додатків розміщені в кінці посібника.

Задачний матеріал посібника може бути використаний у класах, де математика вивчається за навчальними програмами рівня стандарту. Витяги з навчальної програми (рівень стандарту) у вигляді Додатків розміщені в кінці посібника.

Задачі посібника різного рівня складності згруповані за темами, що відповідають чинній програмі з математики 10–11 класів. Задачі, позначені символом  $n^\circ$  ( $n$  — номер задачі), відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень учнів; задачі, позначені символом  $n^*$ , відповідають достатньому рівневі; задачі, позначені символом  $n^{**}$ , відповідають високому рівневі. До всіх задач наведено відповіді.

Умови задач тренувальних вправ підібрані так, що числові значення вправи враховують порядковий номер учня у класному журналі, тому умова однієї вправи — окремий варіант для кожного учня класу. Відповіді до кожного варіанта прогноуються вчителем умовою задач, що дає змогу за короткий час перевірити й оцінити роботу кожного учня класу.

Завдяки цьому можна урізноманітнити навчальний процес, індивідуалізувати роботу як вдома, так і в класі; за умовою однієї задачі збільшити ресурс використаних однотипних задач у десятки разів, формувати в учнів стійкі навички і вміння розв'язування задач однотипного характеру, якісно підготувати їх до тематичного контролю. Це дасть змогу об'єктивно оцінити навчальні досягнення учнів з математики під час тематичного контролю і державної атестації.

Використання порядкового номера учня, охоплення кожного учня індивідуальною задачею, прогнозування відповідей до кожної задачі за допомогою умови завдань — це шляхи застосування методів інформатики і комп'ютерних технологій у навчальному процесі без самого комп'ютера.

Залежно від складу учнів, навчальних можливостей класу, теми з алгебри і початків аналізу чи геометрії, кількості годин, відведених на неї, рівня складності задачі учитель обирає різні шляхи використання багатоваріантних тренувальних вправ для класних робіт і домашніх завдань.

*Задачі тренувальних вправ є універсальними.*

При  $N = 1$  умову тренувальної вправи можна використати одноразово і це буде одноваріантна задача, яку зазвичай подають в навчальних посібниках і підручниках з математики інших авторів.

При  $N = 1, 2$  або  $N = 3$  можна розв'язати тренувальну вправу (рівняння, нерівність, систему рівнянь тощо) в класі, а вдома розв'язати цю ж вправу при  $N = 4; 5$  або  $N = 6$ .

При  $N = 1, 2, 3, \dots, 30$  ( $30$  — кількість учнів класу) умова однієї тренувальної вправи дозволяє одержати  $30$  однотипних задач, які є окремим варіантом для кожного учня, і задавати додому індивідуальні завдання.

У класах з високими навчальними можливостями у класі бажано розв'язати тренувальну вправу з невеликим натуральним числом  $N = 1; 2$  або  $N = 3$  (при менших числах зручніше робити обчислення), що економить час на уроці, а учням, які мають в журналі порядкові номери  $1, 2$  або  $3$  запропонувати у домашньому завданні підставити в умову цієї вправи  $N = 31; 32$  або  $N = 33$ , якщо в класі  $30$  учнів.

Задачі тренувальних вправ можна також використовувати вчителю для складання текстів для самостійних робіт, домашніх і класних контрольних робіт.

В залежності від теми, що вивчається, навчальних можливостей класу, учитель, проглядаючи задачі посібника, робить підбірку (комплектацію) завдань для самостійної, домашньої або класної роботи.

Для геометрії це може бути комплект із  $2, 3$  або  $4$  завдань; для алгебри — з  $3, 4, 5$  або  $6$  завдань.

Кожен комплект задач самостійної або контрольної роботи повинен містити завдання різного рівня. Кожне правильно розв'язане завдання орієнтовно оцінюється певною кількістю балів. Правильне розв'язання всіх завдань дає змогу одержати учневі максималь-

ну оцінку 12 балів. Кількість завдань самостійної або контрольної роботи є орієнтовною.

У класі з середніми навчальними можливостями учитель може зменшити кількість завдань, а у класі з високими навчальними можливостями — збільшити їхню кількість, змінивши оцінювання в балах так, щоб загальна сума балів за правильне розв'язання всіх завдань дорівнювала 12 балів.

Наприклад, якщо самостійна або контрольна робота містить 3 завдання, то перше завдання повинно відповідати початковому та середньому рівням навчальних досягнень учнів і оцінюватися 6 балами, друге завдання достатнього рівня оцінюється 3 балами, третє завдання високого рівня теж оцінюється 3 балами.

Пояснимо *методичну технологію складання тексту однотипних багатоваріантних задач із використанням порядкового номера учня в класному журналі* на завданні з теми «Показникова функція», в якому для усіх 30 учнів класу можна спрогнозувати відповідь, яка буде однаковою.

**Приклад 1\***. Розв'яжіть рівняння, де  $N$  — ваш порядковий номер у класному журналі:

$$2(N+3)^{x+4} + (N+3)^{x+3} = 1 \frac{2}{N+3}.$$

Якщо в класі 30 учнів, то, за умовою цього завдання, учні, підставляючи в рівняння свій порядковий номер, отримають для розв'язання по одному рівнянню. Всього ж, за умовою цього завдання, у класі має бути складено 30 різних рівнянь.

$$\text{Якщо } N = 1, \text{ то } 2 \cdot 4^{x+4} + 4^{x+3} = 1 \frac{2}{4} = 1 \frac{1}{2};$$

$$\text{якщо } N = 2, \text{ то } 2 \cdot 5^{x+4} + 5^{x+3} = 1 \frac{2}{5};$$

$$\text{якщо } N = 3, \text{ то } 2 \cdot 6^{x+4} + 6^{x+3} = 1 \frac{2}{6} = 1 \frac{1}{3};$$

$$\text{якщо } N = 4, \text{ то } 2 \cdot 7^{x+4} + 7^{x+3} = 1 \frac{2}{7};$$

.....

$$\text{якщо } N = 30, \text{ то } 2 \cdot 33^{x+4} + 33^{x+3} = 1 \frac{2}{33}.$$

Корінь кожного із 30 поданих вище рівнянь має бути однаковим, що дає змогу вчителю швидко перевірити правильність виконан-

ня завдання кожним учнем і водночас охопити кожного учня класу окремою задачею. Так у поданому рівнянні було прогнозовано корінь  $x = -3$ .

Розглядаючи функцію  $\varphi(x) = 2 \cdot (N+3)^{x+4} + (N+3)^{x+3}$  і знаходячи її значення  $\varphi(-3) = 2 \cdot (N+3)^{-3+4} + (N+3)^{-3+3} = \frac{2}{N+3} + 1 = 1 \frac{2}{N+3}$ , учитель складає текст завдання.

**Завдання.** Розв'яжіть рівняння

$$2 \cdot (N+3)^{x+4} + (N+3)^{x+3} = 1 \frac{2}{N+3}.$$

*Відповідь.*  $x = -3$ .

Розглянемо складання тексту однотипних багатоваріантних задач з геометрії на задачі з теми «Багатогранники», в якій для всіх 30 учнів класу можна спрогнозувати відповідь, яка буде пов'язана з порядковим номером учня і буде дорівнювати  $3N$  см.

**Приклад 2\*\*.** Розв'яжіть задачу, де  $N$  — ваш порядковий номер у класному журналі.

**Задача\*\*.** Площа основи прямої трикутної призми дорівнює  $8N^2$  см<sup>2</sup>.

Одна зі сторін основи дорівнює  $N\sqrt{17}$  см, а різниця двох інших сторін —  $N$  см. Знайдіть висоту призми, якщо діагональ меншої бічної грані дорівнює більшій стороні основи.

*Відповідь.*  $3N$  см.

Розв'яжемо цю задачу в загальному вигляді. (Учні розв'язують задачу тільки з числовим значенням  $N$ ).

*Розв'язання.* Нехай менша з невідомих сторін дорівнює  $x$  см, тоді більша невідома сторона —  $(x + N)$  см. За формулою Герона маємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} &= s. & (1) \\ p &= \frac{N\sqrt{17} + x + (x + N)}{2} = \frac{N\sqrt{17} + 2x + N}{2}; \\ p - a &= \frac{N\sqrt{17} + 2x + N}{2} - N\sqrt{17} = \frac{2x + N - N\sqrt{17}}{2}; \\ p - b &= \frac{N\sqrt{17} + 2x + N}{2} - x = \frac{N\sqrt{17} + N}{2}; \\ p - c &= \frac{N\sqrt{17} + 2x + N}{2} - (x + N) = \frac{N\sqrt{17} - N}{2}. \end{aligned}$$

Підставляючи в (1) значення  $p$ ,  $p - a$ ,  $p - b$ ,  $p - c$  і  $s$ , учні складають 30 різних рівнянь:

$$\sqrt{\frac{2x + N + N\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{2x + N - N\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{N\sqrt{17} - N}{2} \cdot \frac{N\sqrt{17} + N}{2}} = 8N^2,$$

( $N = 1; 2; 3; \dots; 30$ ) або, після спрощень, одержують:

$$\frac{1}{4} \sqrt{16N^2 \cdot ((2x + N^2) - 17^2)} = 8N^2,$$

$$\sqrt{(2x + N)^2 - 17N^2} = 8N,$$

$$(2x + N)^2 - 17N^2 = 64N^2,$$

$$(2x + N)^2 = 81N^2 \text{ (однотипні індивідуальні рівняння).}$$

Якщо  $N = 1$ , то  $(2x + 1)^2 = 81$ ;

якщо  $N = 2$ , то  $(2x + 2)^2 = 81 \cdot 2^2$ ;

якщо  $N = 3$ , то  $(2x + 3)^2 = 81 \cdot 3^2$ ;

якщо  $N = 4$ , то  $(2x + 4)^2 = 81 \cdot 4^2$ ;

.....

якщо  $N = 30$ , то  $(2x + 30)^2 = 81 \cdot 30^2$ .

Розв'язавши своє індивідуальне квадратне рівняння, учень знаходить, що менша невідома сторона дорівнює  $4N$  см, а більша невідома сторона  $4N + N = 5N$  (см). Звідси діагональ меншої бічної грані буде дорівнювати  $5N$  см, бо  $N\sqrt{17} < N \cdot 5 = N\sqrt{25}$ .

Розглянувши просторовий прямокутний трикутник з гіпотенузою  $5N$  см (діагональ меншої бічної грані) і катетом  $4N$  см (менша сторона основи), учні за теоремою Піфагора визначають висоту призми, як

$$\sqrt{(5N)^2 - (4N)^2} = 3N \text{ (см).}$$

*Відповідь.*  $3N$  см.

Умовою задачі в прикладі 2 було спрогнозовано відповідь  $3N$  см, що дає вчителю змогу швидко перевірити правильність виконання завдання кожним учнем і водночас охопити кожного учня класу окремою задачею, а також зекономити час на запис задач і на їхню перевірку.

Неважко підрахувати, що ресурс усіх розглянутих вище задач, які вчитель може використати у своїй роботі становить  $2 \cdot 30 = 60$  однотипних варіантів задач. При  $N > 30$  ( $30$  — кількість учнів класу) кожен багатоваріантну задачу учитель може використати як тренувальну вправу в підготовці до самостійної або контрольної роботи по цій темі, якщо цю задачу учитель запланував на самостійну або контрольну роботу.

- 39°.** Знайдіть площу чотирикутника  $ABCD$ , якщо  
 $A(2 + N; 2 + N; 3 + N)$ ,  $B(3 + N; 2 + N; 3 + N)$ ,  
 $C(2 + N; 2 + N; 5 + N)$  і  $D(1 + N; 2 + N; 4 + N)$ .  
*Відповідь.* 2.
- 40°.** У трикутнику  $ABC$  знайдіть довжину висоти, проведеної з вершини  $B$ , якщо  
 $A(N; -2 + N; 4 + N)$ ,  $B(-1 + N; 2 + N; 1 + N)$ ,  
 $C(3 + N; 2 + N; 4 + N)$ .  
*Відповідь.*  $0,2\sqrt{481}$ .
- 41°.** Складіть рівняння площини, яка проходить через точку  $A(1 + N; -2 + N; 3 + N)$  паралельно площині  $2x - y + 2N = 0$ .  
*Відповідь.*  $x - y - 3 + N = 0$ .
- 42°.** Знайдіть відстань від точки  $A(1 + N; 2 + N; 3 + N)$  до площини  $6x - 3y - 2z - 1 - N = 0$ .  
*Відповідь.* 1.
- 43°.** Сфера задана рівнянням  $(x - N)^2 + (y - N)^2 + (z - N)^2 = 9$ . Знайдіть:  
 а) аплікату точки  $M(1 + N; 2 + N; z)$ , щоб вона лежала на сфері;  
 б) рівняння площини, яка буде дотичною до сфери в точці  $M$ .  
*Відповідь.* а)  $z = 2 + N$  або  $z = -2 + N$ ;  
 б)  $x + 2y + 2z - 9 - 5N = 0$  або  $x + 2y - 2z - 9 - N = 0$ .
- 44°.** Знайдіть відстань від точки  $K(1 + N; 2 + N; 2 + N)$  до площини, заданої рівнянням  $x + 2y - 2z - 9 - 5N = 0$ .  
*Відповідь.* 3.
- 45°.** Сфера задана рівнянням  $(x + N)^2 + (y + N)^2 + (z + N)^2 = 9$ . Знайдіть абсцису точки  $M(x; -2 - N; 2 + N)$ , щоб вона була всередині сфери.  
*Відповідь.*  $x \in (-1 - N; 1 - N)$ .
- 46°.** Сфера задана рівнянням  $(x - N - 3)^2 + (y - N - 4)^2 + (z - N - 5)^2 = 9$ . Чи перетинається ця сфера з площиною  $2x - y - 2z - 4 + N = 0$ ? Знайдіть відстань від центра сфери до площини.  
*Відповідь.* Ні; 4.
- 47°.** Сфера задана рівнянням  $(x + N + 3)^2 + (y + N + 4)^2 + (z + N + 5)^2 = 16$ . Знайдіть значення параметра  $m$ , щоб площина  $2x - y - 2z + m = 0$  була дотичною до сфери.  
*Відповідь.*  $m = N - 4$ .
- 48°.** Обчисліть величину кута між площинами, заданими рівняннями  $3x - y - z + 2N = 0$  і  $Nx - 2Ny + 2Nz + 2N + 1 = 0$ .  
*Відповідь.*  $\arccos \frac{1}{\sqrt{11}}$ .

49°. Обчисліть величину кута між прямою, заданою точками  $P(-2 + N; 3 + N; 1 + N)$  і  $K(-2 + N; 4 + N; 2 + N)$ , і площиною  $2Nx + 2Ny + Nz - 1 = 0$ .  
*Відповідь.*  $45^\circ$ .

50°. Складіть рівняння образу площини  $2Nx - Ny + z + 2N = 0$  при симетрії її відносно осі ординат.

$$\text{Відповідь. } -2Nx - Ny - z + 2N = 0$$

51°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку  $A(1 + N; -2 + N; -2 + N)$  перпендикулярно до прямої, заданої точками  $M(-3 + N; 4 + N; 5 + N)$  і  $P(-4 + N; 3 + N; 2 + N)$ .

$$\text{Відповідь. } x + y + 3z + N + 7 = 0.$$

52°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку  $A(3 + N; 4 + N; 1 + N)$  перпендикулярно до вектора  $\vec{n}(2; -1; 1)$ .

$$\text{Відповідь. } 2x - y + z - 3 - 2N = 0.$$

53°. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку  $A(-1 - N; 2 + N; 1 - N)$  перпендикулярно до кожної з площин, заданих рівняннями  $3x - 5y + z + N = 0$  і  $x + y - 2z - N = 0$ .

$$\text{Відповідь. } 9x + 7y + 8z - 13 + 10N = 0.$$

54°. При якому значенні  $m$  площини, задані рівняннями  $Nx - y + Nz + 2N + 1 = 0$  і  $mx - 2Ny - z - 2N = 0$ , перпендикулярні?

$$\text{Відповідь. } m = -1.$$

55°. Знайдіть значення  $m$  і  $n$ , щоб площини, задані рівняннями  $Nx - my + 2z + N = 0$  і  $nx - 2y + 4z - 2N = 0$ , були паралельними.

$$\text{Відповідь. } m = 1; n = 2N.$$

56°. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з точки  $A(N; 2 + N; -1 + N)$  до площини  $2x - 6y + 3z + N + 1 = 0$ .

$$\text{Відповідь. } 2.$$

57°. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з центра сфери  $x^2 + y^2 + z^2 - 2Nz = 0$  до площини  $x - 2y + 2z + 9 - 2N = 0$ .

$$\text{Відповідь. } 3.$$

58°. Точки  $A(4 + N; -1 + N; -3 + N)$  і  $B(N; 3 + N; -1 + N)$  є кінцями одного з діаметрів сфери. Знайдіть рівняння сфери і рівняння площин, дотичних до сфери в кінцях цього діаметра.

$$\text{Відповідь. } (x - 2 - N)^2 + (y - 1 - N)^2 + (z + 2 - N)^2 = 9;$$

$$2x - 2y - z - 13 + N = 0; 2x - 2y - z - 5 + N = 0;$$

59°. Як розташована точка  $A(1 + N; 2 + N; 2 + N)$  відносно сфер:

а)  $(x - N)^2 + (y - N)^2 + (z - N)^2 = 9$ ;

б)  $(x - N + 1)^2 + (y - N)^2 + (z - N)^2 = 9$ ;

в)  $(x - N)^2 + (y - N - 1)^2 + (z - N)^2 = 9$ ?

*Відповідь.* а) На сфері; б) зовні сфери; в) всередині сфери.

10	<p><b>Тема 5. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ</b> Первісна та її властивості. Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Обчислення площ плоских фігур, інші застосування інтеграла.</p>	<p><b>Знаходить</b> первісні за допомогою таблиці первісних та їхніх властивостей. <b>Виділяє</b> первісну, що задовольняє задані початкові умови. <b>Обчислює</b> інтеграл за допомогою таблиці первісних та їхніх властивостей. <b>Знаходить</b> площі криволінійних трапецій.</p>
10	<p><b>Тема 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ</b> Випадкова подія. Відносна частота події. Ймовірність події. Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. [Перестановки, розміщення, комбінації]. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення. Графічне представлення інформації про вибірку</p>	<p><b>Обчислює</b> відносну частоту події. <b>Обчислює</b> ймовірність події, користуючись її значенням і комбінаторними схемами. <b>Пояснює</b> зміст середніх показників та характеристик вибірки. <b>Знаходить</b> числові характеристики вибірки даних.</p>
8	Резерв часу і повторення	



### Додаток 5. Геометрія. 11-й клас. Навчальна програма. Рівень стандарту

(51 год. I семестр — 32 год, 2 год на тиждень,

II семестр — 19 год, 1 год на тиждень, резервний час — 4 год)

К-ть год.	Зміст навчального матеріалу	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
10	<p><b>Тема 3. КООРДИНАТИ і ВЕКТОРИ</b></p> <p>Прямокутні координати в просторі.</p> <p>Вектори у просторі. Дії над векторами. Розкладання вектора на складові.</p> <p>Дії над векторами, що задані координатами. Формули для обчислення довжини вектора, кута між векторами, відстані між двома точками.</p>	<p><b>Користується</b> аналогією між векторами і координатами на площині й у просторі.</p> <p><b>Усвідомлює</b> важливість векторно-координатного методу в математиці.</p> <p><b>Виконує</b> дії над векторами, що задані геометрично і координатами.</p> <p><b>Застосовує</b> вектори для моделювання і обчислення геометричних і фізичних величин.</p> <p><b>Використовує</b> координати у просторі для вимірювання відстаней, кутів.</p>
	[Рівняння площини, сфери].	[Розпізнає рівняння площини, сфери].
37	<p><b>Тема 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ</b></p> <p>Циліндри і призми. Конуси і піраміди. Багатогранники. Правильні багатогранники.</p> <p>Куля і сфера. Площина, дотична до сфери. Тіла обертання.</p> <p>Комбінації геометричних тіл.</p> <p>Площа поверхні призми, піраміди, багатогранника, циліндра, конуса, сфери.</p> <p>Об'єм призми та циліндра. Об'єм тіла обертання. Об'єм кулі, піраміди та конуса.</p>	<p><b>Розпізнає</b> основні геометричні тіла, їхні елементи.</p> <p><b>Будує</b> зображення основних видів геометричних тіл, їхніх елементів, перерізів.</p> <p><b>Обчислює</b> основні елементи найпростіших геометричних тіл.</p> <p><b>Встановлює</b> властивості геометричних фігур.</p> <p><b>Застосовує</b> геометричні тіла для моделювання геометричних тіл.</p> <p><b>Обчислює</b> з необхідною точністю об'єми та площі поверхонь геометричних тіл, використовуючи: основні формули; розбиття тіл на найпростіші; вимірювання параметрів реальних тіл та їхніх фізичних моделей.</p>
4	Повторення курсу геометрії	

**Зміст**

Рекомендації для вчителів .....	3
---------------------------------	---

**Алгебра і початки аналізу**

Неперервність функції та похідна. Геометричний і фізичний зміст похідної .....	11
Застосування похідної .....	25
Показникова функція .....	39
Логарифмічна функція .....	49
Похідні показникової і логарифмічної функцій .....	62
Елементи комбінаторики .....	65
Елементи теорії ймовірностей. Математична статистика .....	73
Інтеграл та його застосування .....	77
Повторення курсу алгебри та початків аналізу .....	86

**Геометрія**

Координати у просторі .....	94
Вектори у просторі .....	102
Призми .....	111
Піраміди .....	148
Тіла обертання .....	196
Об'єми багатогранників .....	203
Об'єми та площі поверхонь тіл обертання .....	213
Об'єми та площі поверхонь комбінацій геометричних тіл .....	218
Повторення курсу геометрії .....	227

**Додатки**

<i>Додаток 1.</i> Допоміжні таблиці геометричних фігур .....	234
<i>Додаток 2.</i> Алгебра і початки аналізу. 11-й клас. Навчальна програма. Академічний рівень .....	263
<i>Додаток 3.</i> Геометрія. 11-й клас. Навчальна програма. Академічний рівень .....	265
<i>Додаток 4.</i> Алгебра і початки аналізу. 11-й клас. Навчальна програма. Рівень стандарту .....	267
<i>Додаток 5.</i> Геометрія. 11-й клас. Навчальна програма. Рівень стандарту .....	269
Бібліографічна довідка .....	270